Entendiendo el concepto de la derivada desde su representación gráfica con GeoGebra

Understanding the concept of the derivative from its graphical representation with GeoGebra

Abdul Abner Lugo Jiménez
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Emilio Prud'Homme, República Dominicana
abdul.lugo@isfodosu.edu.do

Noelia Méndez Cuevas
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Félix Evaristo Mejía, República Dominicana
noelialmml23@gmail.com

Manuel Rosario
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Félix Evaristo Mejía, República Dominicana
manuelpein128@gmail.com

Resumen

Debido al cambiante mundo, y al creciente desarrollo de las tecnológicos de información y comunicación, se han apalancado nuevas formas de enseñanza, las cuales han traído consigo nuevas estrategias de enseñanza las cuales permiten adecuar los procesos de enseñanza-aprendizaje. El software GeoGebra es una herramienta que permite dinamizar y transformar las aulas de clase de matemática en pequeños laboratorios de matemáticas, con el fin de motivar y despertar interés por las matemáticas, su visualización y aplicaciones entre los estudiantes. La enseñanza del Cálculo Diferencial en la educación secundaria en República Dominicana, es muy común que se usen textos donde el enfoque predominante es su representación algebraica descartando otras interpretaciones o representaciones, razón por la cual los estudiantes no se sienten interesado en comprender los conceptos más importantes del cálculo diferencial. Muchos investigadores han resaltado la complejidad de los objetos matemáticos básicos, especialmente el de la derivada, y la necesidad de enseñar el significado de las diferentes partes de estos objetos y conectarlos entre sí para su comprensión. En el presente trabajo mostraremos como con el apoyo de la teoría APOS (Acción, Proceso, Objetos y Esquema) y el software GeoGebra, permitirá relacionar el significado de las diferentes partes del objeto matemático, derivada, en términos de tematización del esquema y el nivel de desarrollo de dicho esquema, y la interpretación, representación gráfica de dicho objeto matemático.

Palabras clave: educación, matemática, ciencia, didáctica, derivada, teoría APOS, Geogebra.

Abstract

Due to the changing world, and the increasing development of information and communication technologies, new ways of teaching have been leveraged, which have brought with them new teaching strategies that allow to adapt the teaching-learning processes. GeoGebra software is a tool that allows to dynamize and transform mathematics classrooms into small mathematics laboratories, in order to motivate and awaken interest in mathematics, its visualization and applications among students. The teaching of Differential Calculus in secondary education in the Dominican Republic, it is very common to use texts where the predominant approach is its algebraic representation discarding other interpretations or representations, reason why students do not feel interested in understanding the most important concepts of differential calculus. Many researchers have highlighted the complexity of basic mathematical objects, especially the derivative, and the need to teach the meaning of the different parts of these objects and connect them together for their understanding. In this paper we will show how with the support of the APOS theory (Action, Process, Objects and Scheme) and GeoGebra software, it will be possible to relate the meaning of the different parts of the mathematical object, derivative, in terms of the thematization of the scheme and the level of development of such scheme, and the interpretation, graphical representation of such mathematical object.

Keywords: education, mathematics, science, didactic, derivative, APOS theory, GeoGebra.

Introducción

El interés de los estudiantes es uno de los factores internos que influyen en el logro del aprendizaje de los estudiantes. Es un constructo motivacional desde la perspectiva educativa y puntos de vista psicológicos que incitan a uno a la acción además de dar dirección a las actividades. Además, el interés podría ser considerado como la condición de querer saber o aprender sobre algún objeto y también, como el rasgo que despierta preocupación o curiosidad que mantiene la atención en un objeto. El interés no surge por espontaneidad, sino que surge por la participación, la experiencia y el hábito a la hora de estudiar.

La Unión Europea (UE) ha establecido las siguientes actitudes hacia las matemáticas trabajando con estudiantes (2004): voluntad de superar el “miedo a los números”; voluntad de utilizar cálculos numéricos para resolver problemas de la vida cotidiana; respeto por la verdad como base para aprender el pensamiento matemático; voluntad de hallar las razones y fundamentos en los que se basa el argumento, la voluntad de aceptar y rechazar las opiniones de los demás sobre la base de pruebas válidas o inválidas.

La didáctica, metodología pedagógica o dirección del aprendizaje, en términos generales, es una disciplina teórico-práctica que permite dar respuesta a modo de exposición, interpretación y explicación de técnicas y procedimientos correspondientes al proceso de enseñanza-aprendizaje. Además de ser útil a la hora de planificar, ordenar y aplicar conocimientos en las aulas, es decir, la capacidad de enseñar bien.

La didáctica establece los medios, estrategias y métodos que trazan el camino más adecuado a fin de lograr las competencias que persigue el currículo; de manera que se pueda dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Para qué se enseña? ¿Qué se enseña? ¿Cuándo se enseña? ¿Cómo se enseña? ¿Qué resultados obtuvimos del proceso?

Para Novák (2003), la didáctica de la matemática generalmente se considera una didáctica especial (asignatura, posiblemente una rama de la didáctica) en un sentido de teoría educativa en matemáticas. Es una ciencia con estructura, lógica y forma de pensar propias. En ella podemos distinguir cuatro dimensiones: de contenido, pedagógica, psicológica y constructiva.

Por otro lado, las estrategias didácticas en la enseñanza de las matemáticas deben tratar de garantizar que los estudiantes adquieran conocimientos, habilidades y destrezas matemáticas, informaciones, hechos y, al mismo tiempo, les permita pensar y tomar decisiones para desarrollar competencias claves (Lugo, et. al. 2020).

Una estrategia didáctica se entiende como el conjunto de procedimientos y recursos que utiliza el profesor para promover aprendizajes efectivos y facilitar el procesamiento de los nuevos conocimientos y habilidades matemáticas de manera profunda y consciente durante las interacciones. Las estrategias pedagógicas antes las implicaciones postpandemia tienen la función de provocar una puesta en escena de la experiencia pedagógica como respuesta a los nuevos espacios de aprendizaje mediados por herramientas tecnológicas.

La motivación por aprender es un factor importante, y el área del conocimiento matemático no es la excepción, por lo que es necesario innovar continuamente incorporando tecnologías que correspondan a las nuevas necesidades y formas de trabajar de los estudiantes.

Según Avecilla, et. al. (2015), en su muestra como el rendimiento de los estudiantes al desarrollar su proceso de aprendizaje sin las herramientas de GeoGebra y con la herramienta GeoGebra tiene un efecto positivo.

Es importante recalcar que no solo el uso de la herramienta y su representación simbólica y gráfica facilita la absorción del conocimiento, sino también las opciones de interacción y colaboración integradas en la herramienta ya que facilita el aprendizaje significativo.

La Teoría APOS

La teoría APOS, la cual es un acrónimo en inglés: Acción, Proceso, Objetos y Esquemas, iniciada por Dubinsky en 1996, considera que “comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones son luego interiorizadas para formar procesos que son después encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas” (Dubinsky, 2014).

Una característica importante de la actividad matemática es el uso de representaciones y sistemas de representación, además del lenguaje natural: varios sistemas de escritura numérica, escritura algebraica que expresa relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficas cartesianas, redes, diagramas, esquemas, entre otras (Dubinsky & McDonald, 2001).

La teoría describe el conocimiento matemático de un estudiante como tendencia a dar respuesta a las situaciones problemáticas en la matemática usando la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y construir o reconstruir acciones, procesos y objetos, organizándolos en esquemas para hacer frente a la situación.

Un concepto se concibe primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un objeto (u objetos) previamente concebidos. Una acción es externa porque cada paso de la transición debe ser realizado y dirigido explícitamente por una guía externa; además, cada paso es el paso siguiente, es decir, los pasos de la acción no son inimaginables y no se pueden omitir. Cuando se repite una acción y los alumnos reflexionan sobre ella, la acción puede internalizarse en un proceso.

En este sentido, los estudiantes pueden imaginarse realizando la acción y pueden esperar su resultado sin tener que realizar la acción explícitamente. Cuando necesita transformar estos procedimientos, el estudiante los encapsula en objetos y ahora puede usar acciones en estas entidades recién construidas. Los esquemas se construyen como colecciones coherentes de acciones, procedimientos, objetos y otros esquemas, y las conexiones entre estas estructuras (Arnon et al., 2014).

Los esquemas evolucionan como conexiones entre acciones, procesos, objetos y otros esquemas antiguos y nuevos. Su desarrollo se puede explicar en tres etapas: intra, inter y trans. En el nivel intra, los objetos recién construidos coexisten con otros objetos y procesos, pero el individuo desconoce las posibles conexiones entre ellos. A nivel inter se establecen acciones y procesos entre objetos, por lo que se empiezan a reconocer las relaciones entre procesos y objetos y las transiciones entre ellos. El nivel trans se identifica al conocer la formación completa y poder decidir si el esquema puede abordar casos especiales.

Los objetos aparecen como resultado de dos mecanismos: encapsulación e interiorización. La encapsulación es un mecanismo basado en la abstracción de la reflexión, que se refiere a la posibilidad de tratar un proceso como una cosa completa y poder caracterizarlo y estudiar sus propiedades. A través de la encapsulación, los conceptos abstractos se conciben como objetos con propiedades y diversas representaciones. La interiorización significa la posibilidad de ver el o los esquemas como un todo, actuar sobre él o transformarlo y estudiar su naturaleza, así como la posibilidad de diseccionarlo, analizarlo, examinar sus partes y recombinarlo como un todo. El encapsulamiento de un procedimiento en un objeto, y especialmente la internalización de uno (o más) esquemas en un objeto (y su mecanismo inverso) se complica por la complejidad del objeto matemático y la necesaria representación de los elementos que lo conforman.

Como parte de su aplicación en la investigación y la docencia, la teoría APOS incluye un modelo general que describe posibles formas de enmarcar un concepto o tema de interés. Este modelo hipotético, llamado Descomposición Genética (DG), incluye un análisis teórico de las acciones, procesos, objetos y escenarios que los estudiantes pueden construir para aprender un concepto matemático. Se utiliza para diseñar métodos de investigación y enseñanza. La Descomposición Genética de un tema matemático no es único y está ligado en cierta medida al entorno de enseñanza en el que se construye (Font et al., 2016).

APOS y el concepto de la derivada

Ahora mostraremos como conectamos la teoría APOS con la enseñanza de la derivada, mostrando las acciones, objetos, procesos y esquemas. Para contextualizar, si conducimos a pensar en una función sólo a través de una expresión explícita que conecte las variables implicadas, entonces se puede tener una comprensión de acción de las funciones.

Sin embargo, si mostramos un proceso para el concepto de una función, este permite al individuo pensar en una función en términos de las entradas o valores, las cuales posiblemente no son especificadas, y estas entradas son transformadas para producir una salida. Adicionalmente, la comprensión del objeto, es decir, de la función, permite conformar conjuntos de funciones, y sobre estos conjuntos definir operaciones, dotarlos de una topología, entre otras. Así, es la estructura del esquema la que ayuda a ver una función en una situación matemática o del mundo real. La coherencia de un esquema depende de la capacidad de determinar si el esquema puede utilizarse para resolver un problema matemático en concreto.

Al usar la teoría APOS para construir una Descomposición Genética (DG) del tema, está la podemos observar en la siguiente figura:

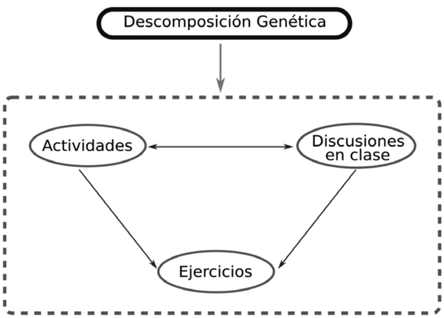

Figura 1. *Diagrama de la Descomposición Gráfica*

Está DG la usaremos para que así tanto profesores como estudiantes puedan comprender el tema de derivadas.

Para las diversas acciones que se puedan ejecutar en la enseñanza del concepto de la derivada es necesario integrar los significados asociados a los objetos, derivada en un punto $f'(a)$ y el de la derivada de una función $f'(x)$ en diferentes contextos, por ejemplo: la velocidad, pendiente de una recta y tasa de variación; y por otro lado, la complejidad semiótica asociada a las relaciones entre $f'(a)$ y $f'(x)$. Está estrategia, permitirá una mejor comprensión por parte de los estudiantes de estos dos macroobjetos, $f'(a)$ y $f'(x)$, los cuales estan relacionados con los esquemas gráficos y algebraicos.

El Concepto de la Derivada

Uno de los conceptos más importantes del análisis matemático, es el de la derivada. La derivada es fundamental para determinar la pendiente de la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

Desarrollaremos dicho concepto, primero de manera intuitiva y gráfica luego formalmente. Algunas funciones varían continuamente; los cambios pequeños en la variable *x* producen ligeras modificaciones en *f(x)*. Otras funciones pueden tener valores que saltan o que cambian con brusquedad. La aplicación geométrica del límite para definir la pendiente de la tangente a una curva conduce directamente al importante concepto de la derivada de una función.

Supongamos que queremos determinar la velocidad promedio que tiene un cuerpo en movimiento durante un intervalo de tiempo, para ello debemos de dividir la distancia recorrida entre el lapso empleado.

Por ejemplo, determinar la velocidad promedio de una piedra que cae de un edificio desde el reposo. ¿Cuál es su velocidad promedio durante los primeros dos segundos de la caída? ¿Cuál es su velocidad promedio durante el intervalo de un segundo entre el segundo l y el segundo 2?

Sabemos por la ley de Galileo, que la distancia recorrida en metros después de t segundos es:

$y=16t^2$

donde 16 es la constante de proporcionalidad.

La velocidad promedio de la piedra durante un intervalo de tiempo dado, es igual al cambio en la distancia, Δy, dividido entre el intervalo de tiempo, Δt.

Para los primeros 2 segundos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16(2)^2-16(0)^2}{2-0}=32\,mts/seg$$

Del segundo 1 al segundo 2:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16(2)^2-16(1)^2}{2-1}=48\,mts/seg$$

Ahora bien, si queremos determinar ahora la velocidad instantánea cuando la piedra que cae en el intervalo de tiempo desde t= 1 seg y t= 2 seg.

Supongamos que deseamos calcular la velocidad promedio de la piedra en el intervalo de tiempo $[t_{0,}\ t_0+h]$, dicho intervalo de tiempo tiene longitud $\Delta t=h$, y además tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16(t_0+h)^2-16(t_0)^2}{h}$$

No es posible usar esta fórmula para calcular la velocidad instantánea en t_0 sustituyendo $h=0$, ya que la división por cero no está permitida. Sin embargo, sí podemos emplearla para calcular la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, comenzando en $t_0=1$, $t_0=2$ Cuando lo hacemos así, vemos un patrón que describimos en la siguiente tabla.

Δt	$t = 1$	$t = 2$
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016
0.00001	32.00016	64.00016
0.000001	32.000016	64.000016

Tabla 1. *Valores del ejemplo*

La velocidad promedio a medida que disminuye la longitud del intervalo que empieza en $t_0=1$, aparentemente se aproxima a un valor igual a 32 a medida que disminuye la longitud del intervalo. Esto sugiere que la piedra está cayendo a una velocidad de *32mts/seg* en el tiempo $t_0=1$. Verifiquemos esta afirmación algebraicamente.

Si fijamos $t_0=1$, y luego desarrollamos la expresión de la velocidad promedio y simplificamos obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1+2h+h^2) - 16(1)}{h} = \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h$$

para valores de h distintos de 0, las expresiones de la derecha y la izquierda son equivalentes, y la velocidad promedio es *32+16h mts/seg*. Ahora podemos ver por qué la velocidad promedio tiene el valor límite *32+16h mts/seg* a medida que h tiende a 0. De manera similar, al fijar $t_0=2$ en la ecuación de la velocidad promedio, obtenemos como resultado

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h} = \frac{16(1+2h+h^2) - 16(1)}{h} = 64 + 16h$$

para valores de h distintos de O. Conforme h se acerca cada vez más a 0, la velocidad promedio en $t_0=2$ tiene el valor límite de *64 mts/seg*.

Representación gráfica del concepto de Razón de Cambio

Dada una función arbitraria $y=f(t)$, calculamos la razón de cambio promedio de y respecto de t en el intervalo $[t_1,t_2]$ dividiendo el cambio en el valor de y, es decir, $\Delta y=f(t_2)-f(t_1)$, entre la longitud del intervalor donde ocurre el cambio, es decir, $\Delta t=t_2-t_1$. De esta manera procedemos a dar la siguiente definición (Lugo, 2017):

Definición 1. *La razón de cambio promedio de $y=f(x)$ respecto de x en el intervalo $[x_1,x_2]$ es*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Geométricamente, la razón de cambio de f en $[x_1,x_2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1,f(x_1))$ y $Q(x_2,f(x_2))$.

En geometría, la recta que une dos puntos de una curva es una secante de esta. En consecuencia, la razón de cambio promedio de f desde x_1 hasta x_2 es idéntica a la pendiente de la recta secante PQ Como podemos apreciarlo en la siguiente figura.

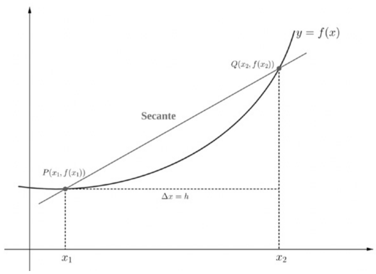

Figura 2. *Una secante de la gráfica y=f (x). Su pendiente es* $\Delta y/\Delta x$ *en el intervalo* $[x_1, x_2]$.

Representación Geométrica de la Derivada

Para definir la tangencia para curvas generales, necesitamos una aproximación dinámica que tome en cuenta el comportamiento de las secantes que pasan por P y los puntos cercanos Q, moviendose hacia P a lo largo de la curva. Como podemos ver a continuación en la siguiente gráfica:

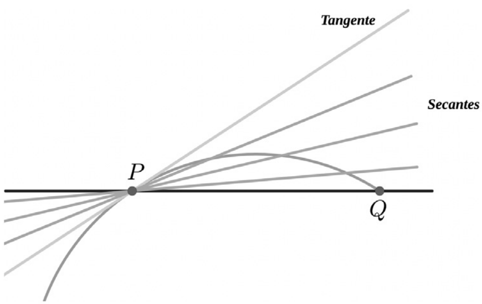

Figura 3. *Recta tangente y secantes a una curva en un punto*

Tal aproximación consistiría en lo siguiente:

Empezamos con lo que podemos calcular, a saber, la pendiente de la secante PQ.

Investigamos el límite de la pendiente de la secante cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva.

Si el límite existe, lo tomamos como la pendiente de la curva en P, y definimos la tangente a la curva en P como la recta que pasa por P con esta pendiente.

Por ejemplo, hallemos la pendiente de la recta tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto $P(2,4)$. Escribir una ecuación para la tangente a la parábola en este punto.

Para ello iniciemos con una recta secante que pasa por *P(2,4)* y *Q(2+h,(2+h)²).* Después escribimos una expresión para la pendiente de la secante *PQ* e investigamos qué pasa con la pendiente cuando *Q* se acerca a *P* a lo largo de la curva:

$$m_{\underline{PQ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{2+h-2} = \frac{h^2 + 4h}{h} = 4 + h$$

Si *h>0*, entonces *Q* está arriba y a la derecha de *P*, si *h<0*, entonces *Q* está a la izquierda de *P*. En cualquier caso, cuando *Q* se aproxima a *P* a lo largo de la curva, *h* se aproxima a cero y la pendiente de la secante se aproxima a 4, es decir

4+h=4

La tangente a la parábola en *P* es la recta que pasa por *P* con pendiente 4, es decir, *y=4x-4*. Veamos el gráfico de esto.

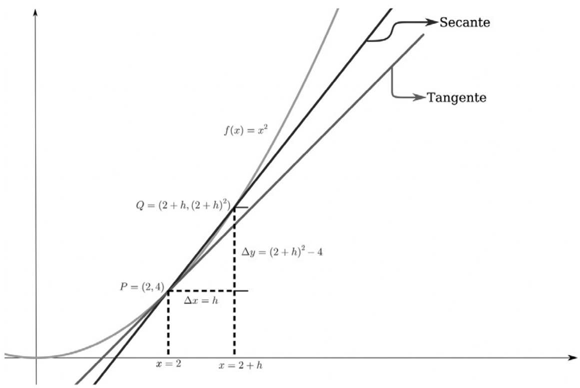

Figura 4. *Representación gráfica de la recta tangente y una secante a la curva en x=2*

Definición Formal de la Derivada

Como hemos visto, definimos la pendiente de una curva en un punto como el límite de las pendientes de las secantes. Este límite, llamado derivada, mide la razón a la que cambia la función, y se constituye como uno de los conceptos más importantes del cálculo. Las derivadas se usan para calcular la velocidad y la aceleración, estimar la razón de propagación de una enfermedad, fijar niveles de producción de manera que pueda maximizarse la eficiencia, encontrar las mejores dimensiones para una lata cilíndrica, averiguar la antigüedad de un objeto prehistórico, y para muchas otras aplicaciones. Ahora, debemos desarrollaremos técnicas para calcular derivadas fácilmente, y aprenderemos cómo usarlas para aproximar funciones complicadas.

Recordemos que definimos que la pendiente de una curva *y=f*(x) en el punto donde $x=x_0$ es

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Cuando este límite existe, lo denominamos derivada de *f* en x_0. A continuación, daremos una definición formal de la derivada como una función obtenida a partir de

f; para ello, tomaremos en cuenta el límite en cada punto del dominio de f (Lugo, 2017).

Definición 2. *(La función derivada). La derivada de la función $f(X)$ con respecto a la variable X, es la función $f`(X)$, cuyo valor en el punto x=a es*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

El dominio de $f`(X)$ es el conjunto de puntos del dominio de $f(X)$ para los que existe el límite, y puede ser el mismo o menor que el dominio de $f(X)$. Si$f`(X)$ existe en un punto X particular, decimos que $f(X)$ es diferenciable (o que tiene derivada) en X. Si $f`(X)$ existe en todos los puntos del dominio de $f(X)$, decimos que $f(X)$ es diferenciable.

También podemos dar una expresión equivalente para la derivada, si escribimos $z=x+h$, entonces $h=z-x$. Diremos que h se aproxima a 0 si y sólo si z se aproxima a x. Por lo tanto, una definición equivalente de la derivada de una función es la siguiente.

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Representación Geométrica en GeoGebra del objeto matemático de la Derivada.

A continuación, mostramos la construcción de la representación geométrica del objeto matemático de la derivada, donde está animación muestra como el estudiante puede observar de manera detallada su construcción, los conceptos envueltos en la definición de la derivada para conocer su interpretación física y geométrica, y de cómo se puede observar bajo qué condiciones la recta secante se va convirtiendo en la recta tangente a la curva en un punto dado de ella.

Paso 1: Determinar la función para la cual se hará la representación, gráfica, y definir el punto donde se estudiará el objeto matemático.

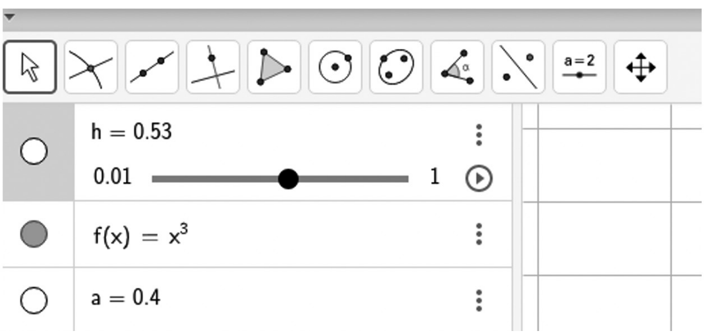

Figura 5. *Animación de la Derivada en GeoGebra*

Lo que al ejecutar obtenemos la siguiente gráfica:

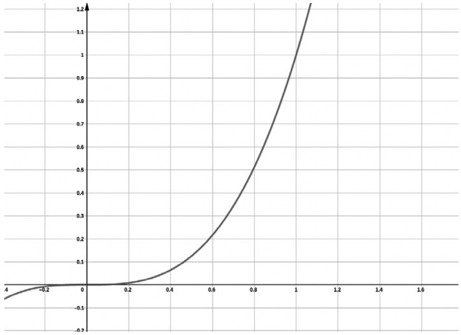

Figura 6. *Animación de la Derivada*

Paso 2: Una vez definida la función y el punto de observación, calculemos los incrementos en ambos ejes, y calculemos el valor del cociente de ellos. Como lo podemos apreciar en la siguiente figura.

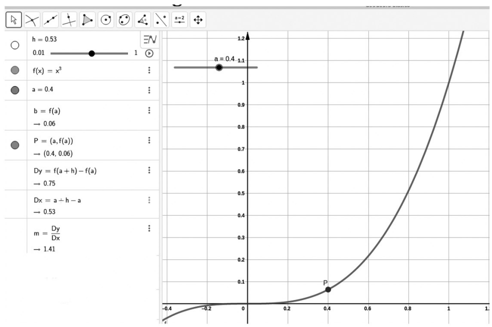

Figura 7. *Animación de la Derivada*

Paso 3: Al ya tener la pendiente de la recta, podemos graficar la recta que pasa por P, con esa pendiente ya calculada, y así obtenemos la recta secante a la curva que pasa por el punto fijado inicialmente.

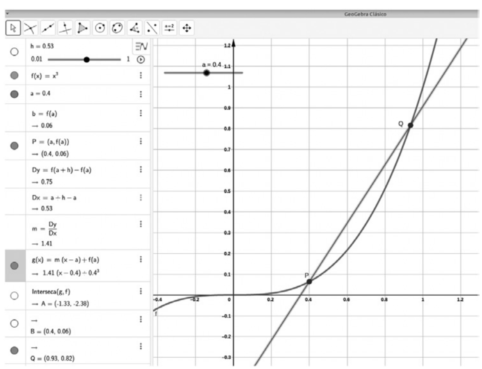

Figura 8. *Recta Secante*

Paso 4: Una vez que obtenemos la recta secante, pasamos a variar el valor de h en el deslizador y vemos en la siguiente secuencia como la secante se vuelve la recta tangente a la curva dada en el punto fijado inicial.

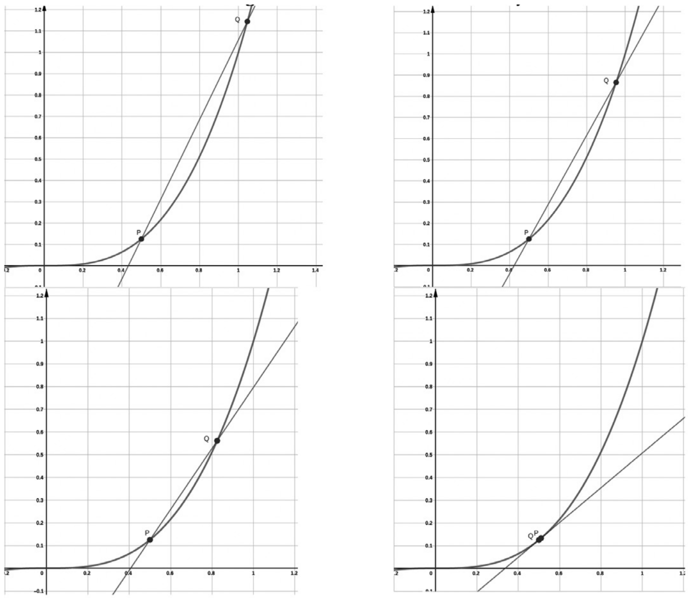

Figura 9. *Animación de la Derivada y la Secante*

Discusión y conclusiones

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tanto a nivel básico, secundaria como universitario es de carácter complejo y esto afecta a muchos estudiantes. Hoy en día los espacios áulicos se han convertido en nichos de estudiantes que son de un pensamiento tecnológico, esto debido a que muchos nacieron en ambientes donde se hace mucho uso de la tecnología. Es por ello, que debido al creciente uso de GeoGebra, este brinda una excelente opción para desarrollar muchas y diversas actividades, tanto básicas como complejas que ayuden a comprender y visualizar los conceptos matemáticos, promoviendo así una gran motivación por entender su aplicación, representación geometría y aplicaciones la resolución de problemas, o como herramienta para estrategias precisas de enseñanza de las matemáticas y cualquier otra que esté asociada con ella.

Debido a esto, los docentes necesitan incorporan en sus clases de matemáticas el uso de softwares, con el objetivo de producir clases dinámicas, amenas y entretenidas que les permitan a sus estudiantes descubrir su propio aprendizaje en base a las construcciones de los objetos matemáticos que se estén estudiando. Lo que conlleva a que nuestros docentes deben capacitarse o estar capacitados para usar recursos tecnológicos o aplicaciones, como GeoGebra.

Recomendamos se desarrollen cursos de capacitación o diplomados para mejorar su desempeño docente, ya que con su uso se desarrollar estrategias innovadoras en el espacio áulico, para que los estudiantes conecten los conceptos matemáticos con su representación gráfica, interpretación geométrica y aplicaciones en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Referencias

Avecilla, F., Cárdenas, O., Barahona, B., y Ponce, B. (2015). *GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil.* Revista Tecnológica-ESPOL, 28(5).

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*.

Ayres, F., Mendelson, E., & Abellanas, L. (1991). *Cálculo diferencial e integral* (No. 517/A98dE/3a. ed.). McGraw-Hill.

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset, 2*, 41-47.

Dubinsky, E. (2014). Actions, Processes, Objects, Schemas (APOS) in Mathematics Education. In: *Lerman, S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Dordrecht*. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_3

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level*: An ICMI study. Kluwer, Dordrecht.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics, 91*(1), 107–122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (Vol. 343). Oxford University Press.

Lugo, A. (2017). *Notas de Cálculo I*. Universidad Politécnica Territorial del Oeste de Sucre. Departamento de Química. Venezuela.

Lugo, A., Torres, A. y Martínez, R. (2020). Habilidades básicas del pensamiento como preámbulo epistemológico al procesamiento analítico de la información en la enseñanza científica universitaria. Revista Saber, Ciencia y Libertad, 15(2), 251-265. https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2020v15n2.6733

Novák, B. (2003). *Capítulos seleccionados de didáctica matemática 1*. Olomouc: UP.

Unión Europea (2004). Puesta en práctica del programa de trabajo Educación y Formación 2010. Comisión Europea: Dirección General de Educación y Cultura.

Stewart, J. & Romo, J. H. (2017). *Cálculo*. Cengage Learning.

Vasquez, M., Pari, A., Auccahuallpa, R. y Ibarra, M. (2020). Libro Geogebra. Publisher: Editorial UNAE. Ecuador.