GeoGebra y la determinación de centros de gravedad de polígonos

GeoGebra and the determination of Centers of Gravity of polygons

Marco Vinicio Vásquez Bernal,
Universidad Nacional de Educación
UNAE
marco.vasquez@unae.edu.ec

Rosa Ildaura Troya Vásquez,
Universidad Nacional de Educación
UNAE
rosa.troya@unae.edu.ec

Resumen

GeoGebra es un software que apoya los procesos de aprendizaje de las matemáticas. El propósito del trabajo es ratificar la versatilidad de este software a fin de evidenciar cómo los procesos prácticos pueden ser emulados en modelos activos que potencian el aprendizaje y el entendimiento de los conceptos matemáticos. Para ello, se ha logrado sistematizar un proceso mediante el cual la determinación de un centro de gravedad de un cuerpo irregular puede lograrse partiendo de la triangulación de una figura geométrica irregular con triángulos. Luego determinar los baricentros de cada uno de los triángulos, para luego ir calculando el centro de gravedad de las figuras que resultan de ir incorporando los triángulos hasta completar la figura planteada. Consecuentemente, GeoGebra es un software que permite hacer estas simulaciones de manera práctica y dinámica desde una construcción real, permitiendo que estos conceptos matemáticos sean asimilados por los estudiantes en su singularidad.

Palabras clave: baricentro, centro de gravedad, aprendizaje práctico.

Abstract

GeoGebra is a software that supports the learning processes of mathematics. The purpose of the research is to ratify the versatility of this software in order to show how the practical processes can be emulated in active models that enhance the learning and understanding of mathematics. Moreover, it has been possible to systematize a process by which the determination of a center of gravity of an irregular body can be achieved starting from the triangulation of an irregular geometric figure with triangles. Then, determine the barycentres of each of the triangles, to then go calculating the center of gravity of the figures that result from incorporating the triangles until completing the proposed figure. Consequently, GeoGebra is a software that allows to do these simulations in a practical and dynamic way since a real construction, allowing these mathematical concepts to be assimilated by the students in their uniqueness.

Keywords: barycentre, center of gravity, learning by doing.

Introducción

Uno de los vacíos que se han determinado y por los que se cuestionan los procesos educativos es por su desconexión con la realidad, se dice que en el aula se trabaja y desarrolla lo teórico como un resultado final que los estudiantes deben memorizarse, irrespetando el hecho de que esa teoría surgió de un proceso de análisis y sistematización que inició en la vida real (Bourdieu, 1990).

Así la geometría es abordada desde las formas ideales y su estudio se limita a memorizar fórmulas que ayudan para calcular áreas y/o perímetros, olvidando que esas formas son ideales (la gran mayoría de ellas no existen en la naturaleza), en la realidad lo que existen son formas irregulares que intentamos entenderlas como modelos aproximados que se construyen con esas formas ideales.

Un ejemplo claro de esto es la determinación del centro de gravedad de un cuerpo. Es conocido que, si el cuerpo tiene un espesor fijo y está construido por material de igual densidad, ese centro de gravedad estará ubicado en el centro de la línea que une los baricentros de las dos caras separadas por el espesor que además son iguales.

Consecuentemente el encontrar ese centro de gravedad se limita a determinar el baricentro de la forma irregular que constituye una de esas caras y este proceso puede hacer triangulando la forma irregular, determinando los baricentros de cada uno de los triángulos resultantes y juntando los triángulos adyacentes (a la par que se va determinando el baricentro de la figura resultante) hasta reconstruir polígono irregular.

Los ingenieros arquitectos han utilizado este método desde hace miles de años, claro cada vez con ayuda de herramientas que perfeccionan el modelo, más cuando se enseña es posible que se limite a presentar su fase final, lo que obviamente causará que el estudiante no aprenda el mismo sino se limite a ingresar datos y leer resultados.

En este trabajo nos apoyamos en GeoGebra para presentar todo el proceso y facilitar que el estudiante desarrolle todo el proceso de forma activa, de manera tal que este conocimiento sea debidamente interiorizado por los estudiantes. El mismo ha sido validado por un grupo de ingenieros que manifestaron su complacencia porque constituye una forma activa y práctica de construir conocimiento con la ayuda de GeoGebra.

La metodología en la que se ha desarrollado este trabajo es la metodología activa y directa a través de un taller, los talleristas serán quienes desarrollen cada una de las partes de la actividad. El facilitador presenta el taller, monitorea cada una de las fases y genera las conexiones con la teoría a través de las reflexiones que surjan de los talleristas.

1. Fundamentos Teóricos

1.1Triangulaciones de polígonos

En geometría se defina una triangulación como una división del área en un conjunto de triángulos que cumplen las siguientes condiciones: La unión de todos los triángulos es igual al polígono original. Los vértices de los triángulos son vértices del polígono original.

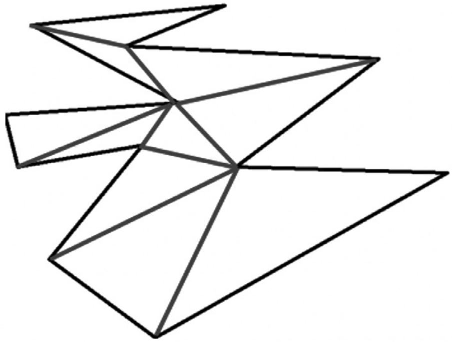


Figura 1. *Triangulación de un polígono irregular*

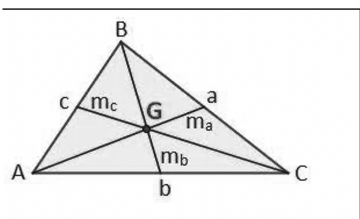
En la figura se observa como un polígono irregular de doce lados es recubierto por diez triángulos escalenos, lo que implica que el área de dicho polígono será el resultado de la suma aritmética de las áreas de los diez triángulos y para ello es posible recurrir a la fórmula del semiperímetro que calcula el área a partir de los valores de los lados. Debe recalcarse que esta partición en triángulos no es única y debe responder más bien a los requerimientos prácticos.

1.2 Baricentro de un triángulo

En física, el baricentro de un cuerpo material coincide con el centro de masas del mismo cuando el cuerpo es homogéneo o cuando la distribución de materia en el cuerpo tiene ciertas propiedades, tales como la simetría, partiendo de este concepto, en geometría el baricentro es el punto de corte de las medianas.

Recordando que una mediana es el segmento de recta que une el punto medio de un segmento con el vértice opuesto.

Ahora bien todos los objetos son tridimensionales y tienen una masa, cuando estos cuerpos tienen un único espesor, sus dos caras son paralelas e idénticas, además si su materia se distribuye uniformemente, podemos afirmar que el centro de masa o centro de gravedad está ubicado justamente en el centro de la línea que une los baricentros de las dos caras del cuerpo.



- **a** es el punto medio del segmento BC, el segmento **aA** es la mediana con respecto a lado BC.
- El segmento **bB** es la mediana respecto al lado AC y cC es la mediana respecto al lado AB.
- **G** es el punto de corte de las medianas, que sería el baricentro

Figura 2. *Baricentro de un triángulo*

1.3.Baricentro de un polígono

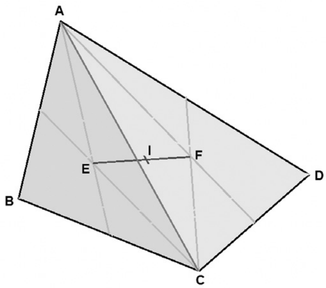


Figura 3. *Determinación de un baricentro en un cuadrilátero*

De lo visto anteriormente se sabe que un cuadrilatero puede triangularse con dos triangulos, para cada uno de ellos es posible determinar su baricentro.

El baricentro o centro de masa del cuadrilatero estará ubicado en el segmento que une los baricentros de los triangulos, su ubicación exacta se determinara en función de la razón de masas entre los dos, que en el caso de triangulos puede simplificarse a la razón entre las areas de los triangulos.

Es posible determinar analiticamente el baricentro de un cuadrilatero, es decir es posible determinar las coordenadas de ese punto en función de las coordenadas de los baricentros de los triangulos que lo forman.

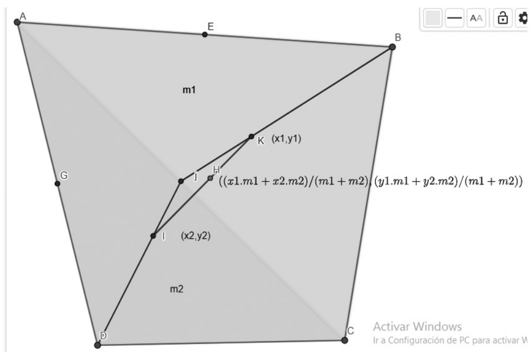


Figura 4. *Determinación de un baricentro en un cuadrilátero en función de los baricentros de los triángulos que lo conforman.*

Este proceso puede continuar incluyendo otros triangulos y repitiendo el proceso, de forma que si tenemos n triangulos, las coordenadas del poligono resultante podrian obtenerse con la siguiente formula:

$$X_{cm} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \qquad Y_{cm} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} y_i a_i$$

Donde:

(*Xcm,Ycm*) serán las coordenadas del centro de masa o baricentro del poligono.

(Xi, Yi), las coordenadas del baricentro de cada uno de los triangulos que triangulizan el poligono.

a_i, el area de cada triangulo.

A, el area total del polígono que será la suma de los $a_{i.}$

2. Procedimiento con GeoGebra

Para iniciar la actividad se grafica en geogebra un polígono de ocho lados, el poligono ABCDEFGH (Figura 5)

Luego construimos los seis triangulos que recubren el poligono, los triangulos son GHA, GAB, GBE, BEC, ECD y GEF y sus baricentros los puntos K, L, M, N, O e I respectivamente.

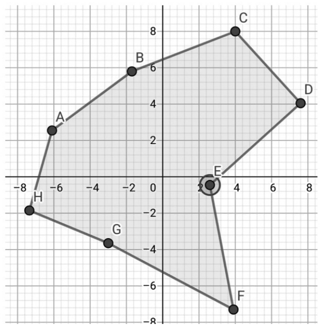


Figura 5. *Grafico en GeoGebra de un polígono de ocho lados*

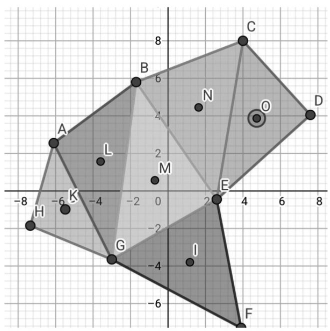


Figura 6. *Grafico en GeoGebra de un polígono de ocho lados divididos en seis triángulos*

En cada triangúlo ubicamos sus baricentros (Figura 6).

Unimos dos triangulos, el GBE con el GBF, además de trazar el segmento de recta que une sus baricentros, sería el segmento MI y luego encontramos el baricentro del cuadrilatero, el punto P (Figura 7).

Se observa que el baricentro del cuadrilatero está en el segmento que une los baricentros de los triangúlos.

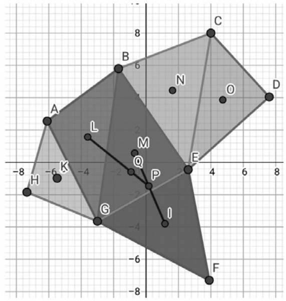


Figura 7. *Determinación de baricentro de tres triángulos adjuntos*

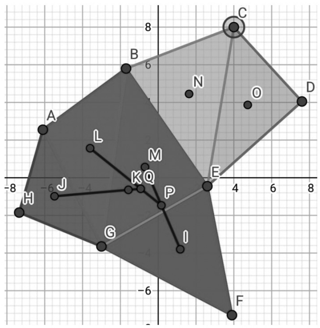


Figura 8. *Determinación de baricentro de un polígono un triángulo adjunto*

Luego seleccionamos un triángulo adjunto al cuadrilatero, en este caso el triángulo GAB trazamos el segmento que une el baricentro del cuadrilátero con el baricentro, de ese triángulo, el segmento PL, además buscamos el baricentro del poligono de cinco lados, el punto Q que resulta de juntar el cuadrilatero con ese triangúlo seleccionado (Figura 8).

El baricentro del polígono de cinco lados está sobre el segmento que une los baricentros.

Nuevamente seleccionamos un triángulo adjunto al cuadrilátero, en este caso el triángulo GHA, trazamos el segmento que une el baricentro del polígono de cinco lados con el baricentro de ese triángulo, el segmento QJ además buscamos el baricentro del polígono de seis lados que resulta de juntar el cuadrilátero con ese triángulo seleccionado, es el punto K.

El baricentro del polígono de seis lados está sobre el segmento que une los baricentros.

Continuamos hasta juntar los seis triángulos en el polígono de ocho lados, el último baricentro determinado será el baricentro del polígono dado, en este caso el punto S. De lo visto se puede concluir que el baricenro de dos figuras adjuntas estará ubicado sobre el segmento de recta que une los baricentros de esas figuras.

Para determinar el punto exacto del baricentro resultante, haremos dos contrucciones buscaremos las relaciones de sus areas.

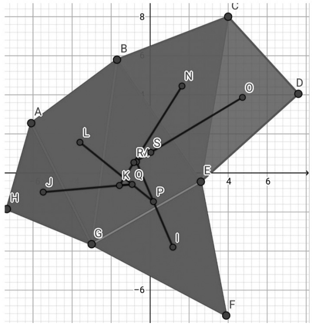


Figura 9. *Determinación de baricentro de un polígono irregular*

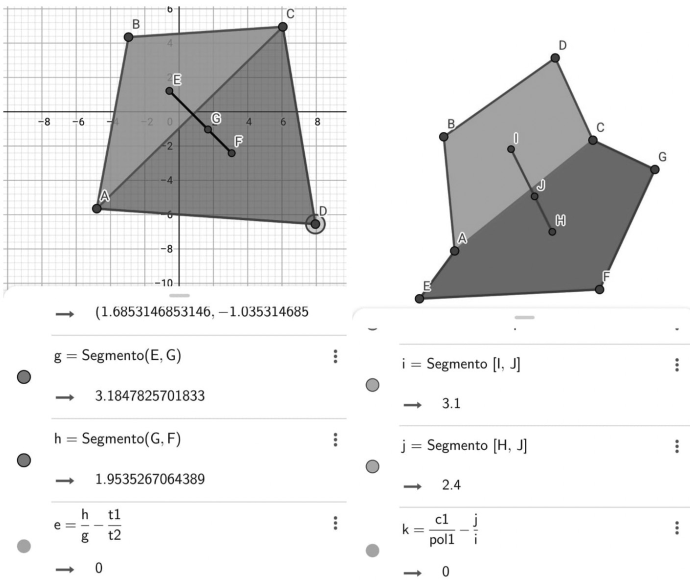


Figura 10. *Determinación de la ubicación del baricentro en el segmento de los baricentros de dos polígonos que lo forman.*

En la primera, un cuadrilatero se lo divide en dos triángulos, luego se determina los baricentros de cada uno de ellos, E y F, estos puntos se unen con un segmento, luego se determina el centro de gravedad para el cuadrilátero, que es el punto G, por último se observa que la relación de las magnitudes EG/GF menos la relación de las areas ABC/ACD es cero, por tanto las razones de los segmentos es la misma que la razón entre las respectivas áreas.

Algo similar se observa cuando dividimos un polígono de siete lados ABCDEFG en un cuadrilátero ABCD un polígono de cinco lados EACGF, cuyos baricentros son los puntos I e H, respectivamente. La diferencia entre las razón de segmentos IJ/JH y la razón entre las areas ABCD/EACGF es cero, o estas razones son iguales.

Estos resultados permiten concluir que el baricentro de dos polígonos adjuntos se ubica en el segmento que une los baricentros de esos polígonos, descomponiendo ese segmento en dos partes cuya razón de sus longitudes es igual a la razón entre las areas respectivas de los polígonos.

CONCLUSIÓN

Si bien aquí se ha demostrado la validez de está construcción para áreas, el proceso puede generalizarse para cuerpos construidos con el mismo material (igual espesor), donde deberiamos hablar de centros de gravedad.

Como conclusión principal se puede establecer que GeoGebra facilita la construcción de conocimiento para contenidos abstractos, como es el concepto del centro de gravedad, en un ambiente agradable por su versatilidad y maneo amigable.

Para este trabajo se hizo una construcción en material concreto, se contruyó una plataforma de madera, cuya forma es un polígono irregular de ocho lados, siguiendo el proceso indicado se ha logrado determinar su centro de gravedad.

Referencias

Bourdieu, P., Gros, F. (1990) Los contenidos de la enseñanza. Principios para la reflexión Universidad Futura, 2:4, pp. 20-24

Contreras, R., Eguia, J. L., & Solano, L. (2016). RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia. 71-90, 19. http://doi.org/10.5944/ried.19.2.15624

Feo, R. (2010). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas. The Lancet, 329(8533), 622. http://doi.org/10.1016/S0140-6736(87)90255-8

Flores, J., Ávila, J., Rojas, constanza, Sáez, F., Acosta, R., & Trujillo, C. (2017). Estrategias didácticas para el aprendizaje significativo en contextos universitarios. Chile. Retrieved from http://docencia.udec.cl/unidd/images/stories/contenido/material_apoyo/ESTRATEGIAS DIDACTICAS.pdf

García, S. (2017). Ánalisis del modelo constructivista cognitivo y socio cultural para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje. Universidad pedagógica nacional. Retrieved from http://200.23.113.51/pdf/24790.pdf

Latorre, A. (2005). La investigación-acción Conocer y cambiar la práctica educativa. (S. . Editorial Graó, de IRIF, Ed.). Barcelona. Retrieved from https://www.uv.mx/rmipe/files/2016/08/La-investigacion-accion-Conocer-y-cambiar-la-practica-educativa.pdf

Melquiades, A. (2014). Estrategias didácticas para un aprendizaje constructivista en la enseñanza de las matemáticas en los niños y niñas de nivel primaria, 43–58.

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. Sophia, 19. http://doi.org/10.17163/soph.n19.2015.04

Conferencia del autor en el evento Segundas Jornadas Bolivianas de GeoGebra, "Uso de GeoGebra para entender las lineas y puntos notables de un triángulo y su utilidad para construir equilibrio en las formas, (13) 2 Jornadas Bolivianas de Geogebra - YouTube