Construcciones de objetos matemáticos usando GeoGebra

Mathematical object constructions using GeoGebra

Abdul Abner Lugo Jiménez

Ureña, Recinto Emilio

Instituto Superior de Formación Docente Salomé Prud'Homme, República Dominicana

abdul.lugo@isfodosu.edu.do

Resumen

Las construcciones con regla y compás, van desde la determinación de puntos, rectas o segmentos de recta y círculos o arcos, donde la regla y el compás son ideales, es decir, la regla no tiene medida y el compás se supone que se cierra al levantarlo del papel. Los problemas más famosos propuestos para resolver con solo regla y compás son los ya muy conocidos: cuadratura de círculos, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo. El requerimiento de usar sólo la regla y el compás para realizar estas construcciones, está asociado a la visión que tenía Platón de que la recta y el círculo eran las únicas figuras perfectas (Lugo, 2022). Los griegos pusieron todo su ingenio y esfuerzo en encontrar una solución a estos tres problemas anteriores, pero nunca llegaron a ello, aunque todo ese esfuerzo condujo a otros descubrimientos como: la división de un segmento de rectas en cualquier número de segmentos de igual medida; trazar paralelas a una recta dada; hallar la bisectriz de un ángulo dado; construcción de un cuadrado de igual área que la de un polígono cualquiera dado.

Palabras clave: educación, matemática, ciencia, geometría, Geogebra.

Summary

The constructions with ruler and compass range from the determination of points, straight lines or line segments and circles or arcs, where the ruler and compass are ideal, that is, the ruler has no measure and the compass is supposed to be closed when it is lifted from the paper. The most famous problems proposed to be solved with only ruler and compass are the well-known ones: squaring of circles, doubling of the cube and trisection of an angle. The requirement to use only ruler and compass to perform these constructions is associated with Plato's view that the straight line and the circle were the only perfect figures (Lugo, 2022). The Greeks put all their ingenuity and effort in finding a solution to these three previous problems, but they never got there, although all that effort led to other discoveries such as: the division of a straight line segment into any number of segments of equal measure; drawing parallels to a given straight line; finding the bisector of a given angle; construction of a square of equal area to that of any given polygon.

Keywords: education, mathematics, science, geometry, Geogebra.

Introducción

El problema de la construcción siempre ha sido el tema más estudiado en geometría. Se puede hacer una amplia variedad de construcciones con solo una regla y un compás (ideal), por ejemplo: se puede dividir en dos un segmento de línea o un ángulo, se puede dibujar una línea desde un punto perpendicular a una línea dada, se puede inscribir un hexágono regular en un círculo, etc. En todos estos problemas, la regla se usa simplemente como una regla, una herramienta para dibujar líneas rectas, no para medir o marcar distancias. La restricción tradicional sobre la regla y el compás se remontan a la antigüedad, aunque los propios griegos no dudaron en utilizar otras herramientas.

Uno de los problemas de construcción clásicos más famosos es el llamado problema de contacto de Apolonio (hacia el año 200 a.C.), en el que se dan tres círculos arbitrarios en el plano y se requiere un cuarto círculo tangente a estos tres círculos dados. En particular, uno o más círculos dados pueden ser degenerados, es decir, un punto o una recta (un círculo con radio cero o infinito, respectivamente). Por ejemplo, se podría requerir querer construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas y que pase por un punto dado. Si bien estos casos especiales son fáciles de resolver, el problema general es mucho más difícil.

De todos los problemas de construcción con regla y compás, el hacer un polígono regular de n lados es quizás el que más interés tiene. Para ciertos valores de n, por ejemplo, para$n= 3,4,5,6,$ la solución se conoce desde la antigüedad, y forma una parte importante de la geometría escolar. Pero para el heptágono regular $n=7$ la construcción se ha demostrado imposible.

Los griegos pusieron todo su ingenio y esfuerzo en encontrar una estructura de regla y compás que solucionara los tres problemas anteriores, pero nunca llegaron a ello, aunque en estos casos suelen producirse otros descubrimientos. Por ejemplo, Arquímedes aproximó π con un error de menos de 10^{-2}, un logro notable para los recursos disponibles en ese momento.

Durante casi el siglo XX, matemáticos y aficionados han intentado sin éxito resolver el cuadrado de un círculo, la trisección de un ángulo y la multiplicación de un cubo. Recién en el siglo XIX aparecieron herramientas algebraicas que podían probar la imposibilidad de tal estructura. De hecho, en 1837, el excéntrico y ahora poco conocido matemático francés Pierre Wantzel (1814-1848) demostró algebraicamente la imposibilidad de construir un con regla y compás de medida $\pi/9$ a partir ángulo a partir de $\pi/3$.

Las técnicas utilizadas para probar la imposibilidad de algunas construcciones geométricas incluyen su formulación en términos de geometría analítica y el uso de la teoría de extensiones de cuerpo.

Comenzaremos por formalizar la idea de una construcción de compás y regla. Supongamos que se da un subconjunto M de puntos en el plano cartesiano. Consideremos los siguientes tipos de trazados permitidos en el plano, partiendo de los puntos de M:

Trazar una línea a través de los dos puntos de M.

Trazar una circunferencia con centro en un punto de M y radio igual a la distancia entre un par de puntos de M.

Definición 1. Un punto P del plano es construible en un paso a partir de M si P es la intersección de cualesquiera dos de las rectas o circunferencias trazadas como en 1 y 2 . Un punto $P\in$ R2 es construible a partir de M si existe una sucesión finita $P_1P_2...P_N=P$ de puntos en R2 tal que para cada $i \in \{1,2,.....n\}$, el punto Pi es construible en un paso a partir del conjunto $M\cup\{P_1,P_2,....P_{i-1}\}$.

Ejemplo 1. Ilustremos la idea anterior, a través de la construcción con regla y compás del punto medio de un segmento P_1P_2, donde $P_1P_2 \in R^2$ son puntos dados.

Solución: Sea $M=\{P_1,P_2\}$

Paso 1: Trazar la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

Paso 2: Trazar la circunferencia con centro en P_1 y radio el segmento P_1P_2.

Paso 3: Trazar la circunferencia con centro en P_2 y radio el segmento P_1P_2.

Paso 4: Si A_1A_2 son los puntos de intersección de las circunferencias trazadas en los pasos 2 y 3, se traza ahora la recta que pasa por A_1 y A_2. Sea A_3 el punto de intersección de la rectas trazadas en los pasos 1 y 4.

La existencia de la sucesión $A_1A_2A_3$ nos permite afirmar que el punto A_3 es construible a partir de M, pues A_1,A_2son construibles en un paso a partir de M y A_3 es construible en un paso a partir de $M\cup\{A_1,A_2\}$

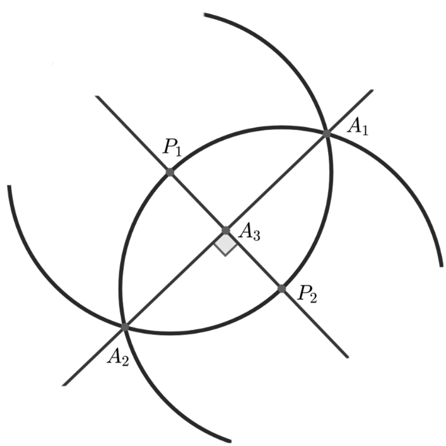

Figura 1. *Construcción del ejemplo 1 con GeoGebra*

Objetivo

Este taller tiene como objetivo primordial el de ser una guía orientativa para facilitar la elaboración de construcciones de objetos matemáticos derivados de la geometría. Su contenido puede ser útil tanto a estudiantes, docentes, como a aficionados de la geometría. No pretende ser extensivo sino más bien proveer una introducción práctica en el uso del software GeoGebra para la construcción de objetos matemáticos geométricos que se realizan en el aula de clase con el uso de la regla y el compás.

Construcciones básicas de objetos matemáticos de la geometría

A continuación, presentaremos una serie de construcciones usando GeoGebra, de algunos objetos geométricos, y al final dos actividades que deben realizar donde se utilizan las construcciones previas.

Mediatriz (y el punto medio) de un segmento

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se traza un segmento AB.

Se traza una circunferencia con centro en A cuyo radio sea la longitud del segmento AB,

Se traza una circunferencia con centro en B cuyo radio sea la longitud del segmento AB,

Se traza una recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias anteriores. Dicha recta es la mediatriz del segmento AB y el punto medio de dicho segmento es el punto de intersección del segmento con la mediatriz, al que llamaremos C.

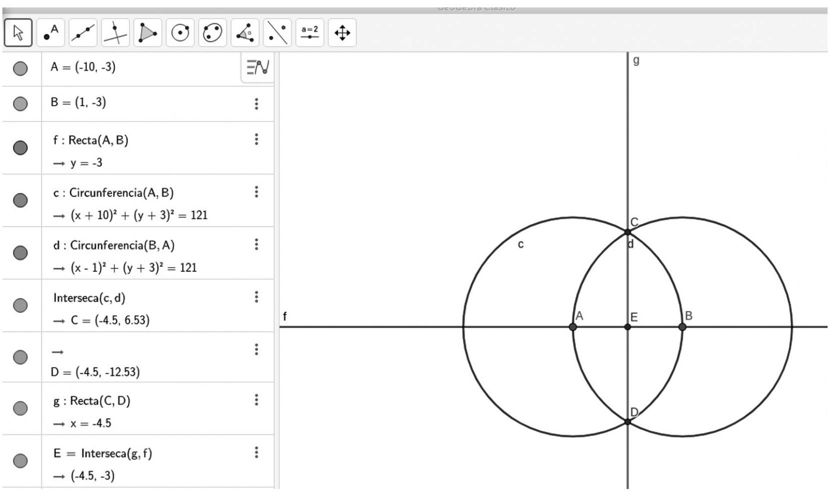

***Figura 2**. Construcción de la mediatriz de un segmento.*

Bisectriz de un ángulo

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Construir un ángulo cualquiera ABC,

Se traza una circunferencia de centro en el vértice B y que la longitud de su radio sea más pequeña que la longitud de los segmentos AB y BC,

Se trazan dos circunferencias cuyos centros estén en los puntos de corte de la circunferencia construida en el paso anterior con los rayos del ángulo, dichos puntos se denominan D y E. Las longitudes de los radios de dichas circunferencias serán más pequeños que los segmentos BD y BE respectivamente,

Se traza la semirrecta que va desde el punto B hasta el punto de intersección de las circunferencias trazadas, dicha semirrecta es la bisectriz del ángulo.

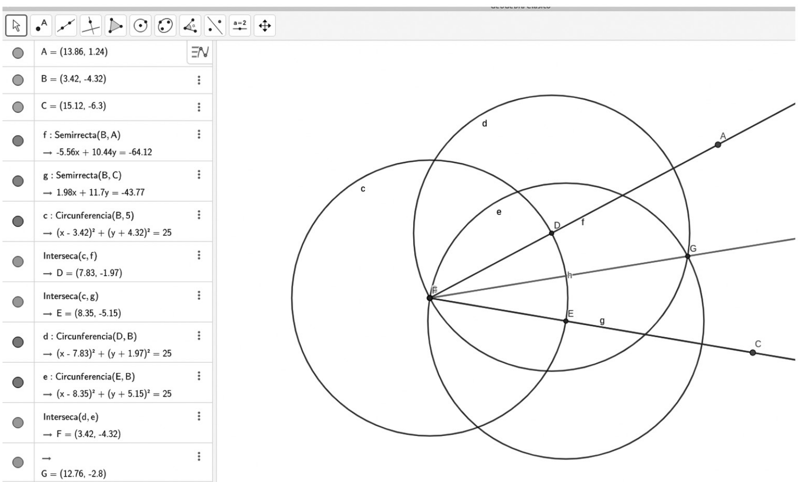

Figura 3. *Construcción de la Bisectriz de un ángulo.*

Centro de una circunferencia

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se trazan tres puntos *A, B y C* diferentes no alineados,

Se traza una circunferencia cualquiera que pase por esos tres puntos,

Se trazan dos circunferencias con centro en A y B respectivamente cuyo radio sea la medida del segmento AB,

Se traza una recta que pase por los puntos de intersección de las dos últimas circunferencias trazadas,

Se trazan dos circunferencias adicionales con centros en B y C respectivamente cuyos radios sean la medida del segmentoBC,

Se traza una recta que pase por los puntos de intersección de las últimas dos circunferencias construidas,

Se traza el punto de intersección de las rectas trazadas en los pasos 4 y 6. A dicho punto lo denominamos D y es el centro de la circunferencia buscada.

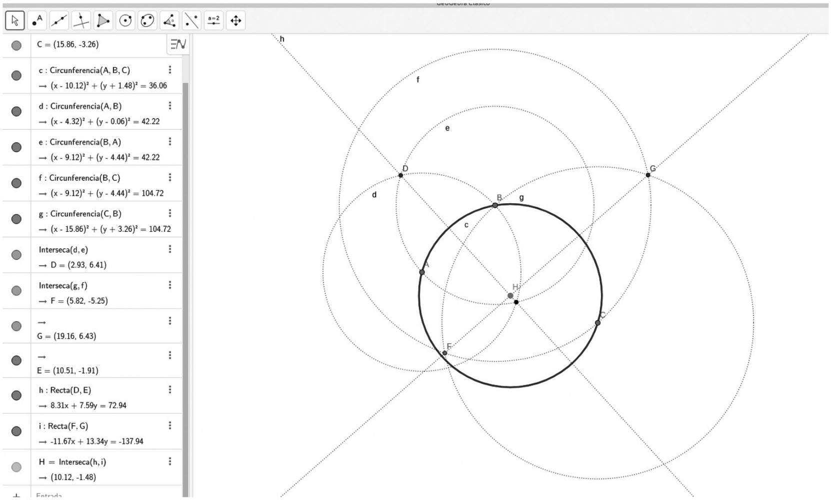

Figura 4. *Construcción del Centro de la Circunferencia*

Punto simétrico con respecto a otro

Para la realización de está construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se trazan dos puntos *A* y *B* cualesquiera y una recta que pase por los mismos,

Se traza una circunferencia con centro en *B* y de radio *AB*,

Se traza el punto de intersección de la circunferencia con la recta *AB*. Dicho punto denominado *C* es el simétrico de *A* con respecto a *B*.

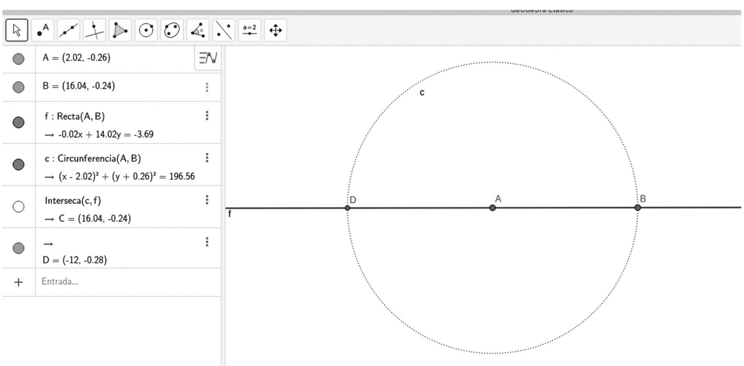

Figura 5. *Construcción del Punto Simétrico*

Perpendicular por un punto

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se trazan dos puntos A y B, una recta que pase por ellos y un punto exterior a la recta denominado P,

Se trazan dos circunferencias, una de centro A y radio AC, y otra de centro B y radio BC,

Se trazan los puntos de intersección de las circunferencias y la recta que pasa por dichos puntos. Esta recta es la perpendicular por un punto.

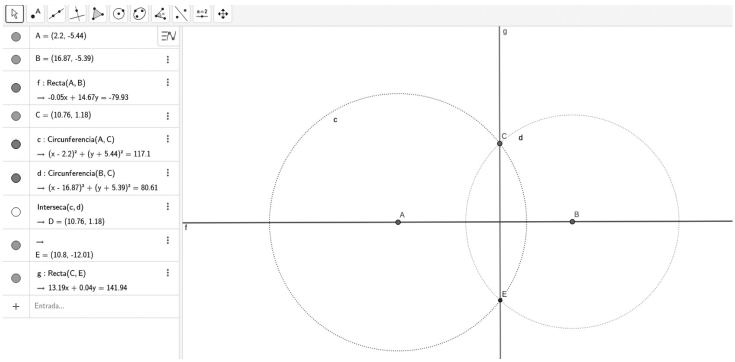

Figura 6. *Construcción de recta perpendicular a un punto*

Paralela a una recta por un punto dado

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se traza una recta que pase por los puntos A y B, y un punto exterior a la misma denominado C,

Se construye una circunferencia cuyo centro sea el punto C y corte la recta en los puntos a los que llamaremos D y E,

Se trazan dos circunferencias, una de centro A y otra de centro B. Ambas circunferencias deben pasar por el punto C,

Se traza el punto F el cual interseca las circunferencias construidas en el paso anterior y se traza una recta que pase por los puntos F y E. Esta recta corta una de las circunferencias en el punto G,

Se traza la recta que pasa por los puntos C y G, la cual es paralela a la recta original.

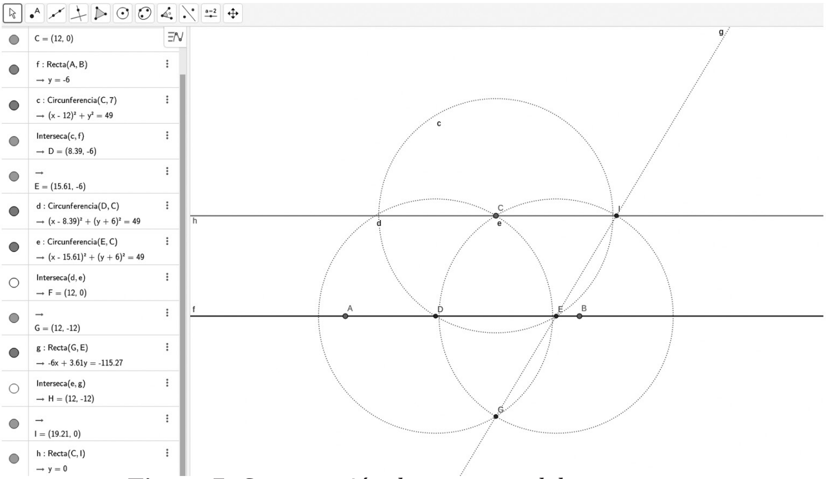

Figura 7. *Construcción de recta paralela a un punto*

Tangente a una circunferencia desde un punto exterior

Para la realización de está construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se construye una circunferencia de centro A, y se marca un punto exterior a esta denominado B,

Se traza el segmento AB y se construye la mediatriz de dicho segmento,

Se marca el punto de intersección C y se construye una circunferencia de centro C y radio BC que corte la circunferencia dada en D y E,

Se trazan las rectas que pasan por los puntos B y D; y por los puntos B y E, las cuales son tangentes a la circunferencia dada y perpendiculares a los radios AD yAE.

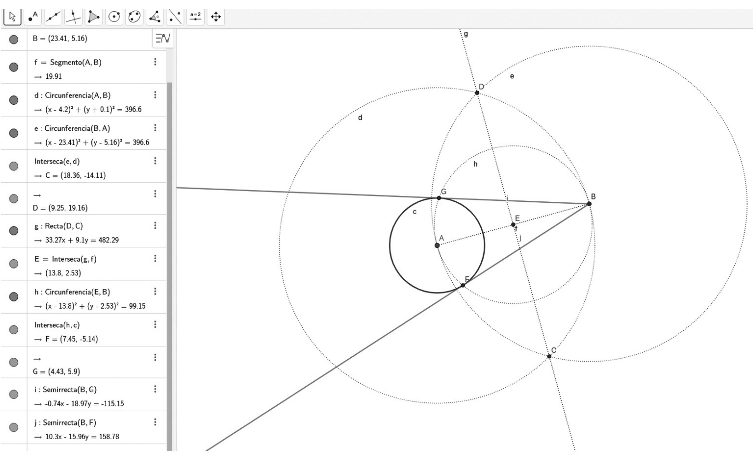

Figura 8. *Construcción de tangentes a una circunferencia*

Hexágono regular a partir del lado

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se traza un segmento AB,

Se trazan dos circunferencias (de radioAB) concéntricas en los puntos A y B respectivamente y se marca uno de sus puntos de intersección, denominado C,

Se construye una circunferencia concéntrica en C (de radio AC ó BC) y se marcan sus puntos de intersección restantes con las circunferencias construidas en el paso anterior. Dichos puntos se denominan D y E,

Se construyen dos circunferencias concéntricas en D (de radio CD) y E (de radio CE). Se marcan sus puntos de intersección con la circunferencia construida en el paso anterior. Dichos puntos se denominan F y G,

Se construye el hexágono regular uniendo los segmentos AE, EF, EG, GD, DB Y BA

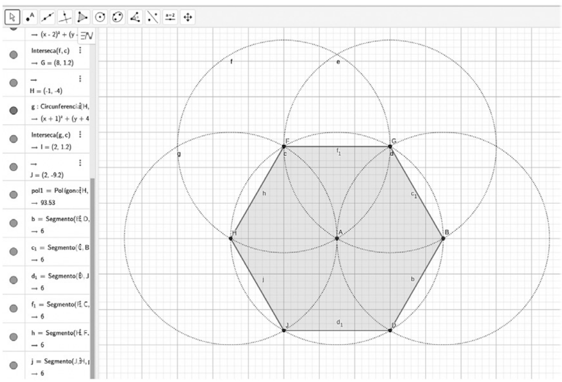

Figura 9. *Construcción de hexágono a partir de un lado.*

Hexágono regular a partir del radio

Para la realización de esta construcción se deben seguir los siguientes pasos:

Se trazan dos puntos A y B y se construyendo dos circunferencias (ambas de radio AB con centros en A y B respectivamente,

Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias construidas en el punto anteriores. Dichos puntos se denominan C y D respectivamente,

Se construye una circunferencia con centro en C y radio AC y se marca su punto de intersección con la circunferencia concéntrica en A. Dicho punto se denomina E, Se construye una circunferencia con centro en E y radio AE) y se marca su punto de intersección con la circunferencia con centro en A. Dicho punto se denomina F,

Se construye una circunferencia con centro en F y radio AF y se marca su punto de intersección con la circunferencia de centro en A. Dicho punto se denomina G,

Se trazan los segmentos *DB, BC,CE,EF,FG Y GD* y de esa forma se construye el hexágono regular.

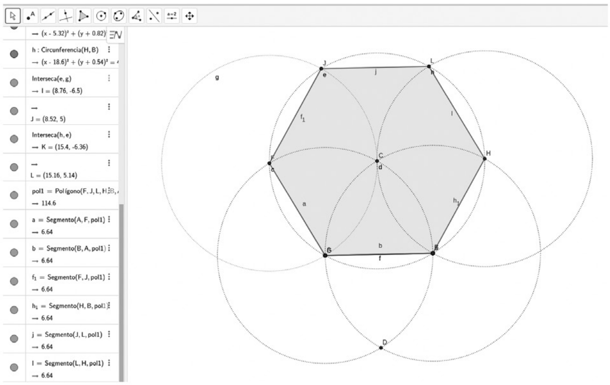

Figura 10. *Construcción de hexágono a partir del radio. Fuente: Elaboración propia.*

Actividad

Construir usando las anteriores construcciones los siguientes objetos matemáticos:

Triangulo equilátero,

Cuadrado,

Pentágono regular a partir de un lado,

Pentágono regular inscrito en una circunferencia.

Referencias

Avecilla, F., Cárdenas, O., Barahona, B., y Ponce, B. (2015). *GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil*. Revista Tecnológica-ESPOL, 28(5).

Iranzo, N., y Fortuny, J. (2009). *La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado*. Enseñanza de las Ciencias, 27(3), 433-446.

Lugo, A. (2022). *WorkBook de Álgebra Abstracta*. Serie Matemática ISFODOSU, República Dominicana.