



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

## MAESTRIA EN EDUCACION

Título:

**“SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES”**

Autor:

**Calahorrano Terán Byron Saúl  
C.I.1709356099**

Tutora:

**Dra. Yuly Vanegas**

Título:

**Master en Educación con mención en enseñanza de la Matemática.**

**Fecha: Azogues, 20 de octubre de 2018**



## RESUMEN

El trabajo fue elaborado para presentar una propuesta nueva de enseñanza, en la Unidad Educativa Mitad del Mundo, a los alumnos del Décimo año de educación Básica. El tema implementado es Sistemas de Ecuaciones Lineales. Entre los contenidos se implementó, los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones, para la evaluación se implementó un juego didáctico llamado el Crack de las matemáticas.

Mediante este trabajo se pretende conseguir en los alumnos mayor seguridad para mejorar la resolución de problemas, tener una mejor participación y acrecentar el conocimiento matemático basado en la experiencia, la reflexión la conceptualización y la aplicación de los conocimientos nuevos adquiridos. Palabras clave: Sistema de Ecuaciones, Método, juego didáctico.

## SUMMARY

The work was prepared to present a new teaching proposal, in the Middle of the World Educational Unit, to the students of the 10th year of Basic Education. The theme implemented is Systems of Linear Equations. Among the contents was implemented, the methods of solving the systems of equations, for the evaluation was implemented a didactic game called the Crack of mathematics.

Through this work, students are expected to achieve greater security in order to improve problem solving, have a better participation and increase mathematical knowledge based on experience, reflection, conceptualization and the application of new knowledge acquired. Keywords: System of Equations, Method, didactic game.



## INDICE DEL TRABAJO

Portada .....	1
Resumen.....	2
Índice .....	3
Cesión de Derechos.....	4
1. Introducción .....	5
1.A Intereses y contextualización de su labor docente .....	5
1.B Estructura del Dossier o memoria .....	5
2. Presentación de la Unidad Didáctica Implementada .....	6
2.A Presentación de Objetivos .....	6
2.B Presentación de contenidos y Contextualización en los currículos oficiales .....	7
2.C Diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje en relación con los objetivos y los objetivos.....	8
2.D Presentación de las actividades de evaluación formativa .....	8
3. Implementación de la Unidad didáctica .....	8
Primera sesión dentro del aula .....	8
Estrategias metodológicas, experiencia concreta. Reflexion-Observacion .....	8
Conceptualización. Aplicación. Recursos.....	10
Segunda sesión dentro del aula .....	10
Ciclo de aprendizaje. Prerrequisitos. Desarrollo, Experiencia, Conceptualización.....	10
Aplicación. ....	11
Tercera sesión dentro del aula. Tema: Resolución de sistemas por el método grafico.....	11
Actividades a realizar. Desarrollo. Experiencia. Reflexión. Contextualización.....	11
Aplicación .....	12
Desarrollo de la cuarta, quinta y sexta y séptima sesión.....	12
Desarrollo.....	13
Octava Sesión y Novena Sesión.....	13
Evaluación. Crack del Algebra. Objetivo didáctico del juego.....	14
Material.....	15
Reglas del juego .....	16
Evaluación .....	17
3.A Adecuación de los contenidos implementados a los planificados y adaptaciones realizadas.....	18
3.B Resultado de aprendizajes de los alumnos .....	19
3.C. Descripción del tipo de interacción .....	20
3.D Dificultades Observadas .....	21
4. Valoración de la Unidad didáctica.....	21
4.A Valoración de la Unidad Didáctica y propuestas de mejora, siguiendo las pautas que cada especialidad ha proporcionado para guiar la practica reflexiva .....	22
5. Reflexiones finales .....	23
5.A En relación a las asignaturas troncales de la maestría .....	23
5.B En relación a las asignaturas de la especialidad .....	27
5.C En relación a lo aprendido durante el TFM .....	29
Referencias Bibliográficas .....	30
Autoevaluación .....	31



Quito, 25 noviembre de 2018

Yo, BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN, autor/a del Trabajo Final de Maestría, titulado: Sistemas de Ecuaciones Lineales, estudiante de la Maestría en Educación, mención Matemática con número de identificación 1709356099, mediante el presente documento de constancia de que la obra es de mi exclusiva autoría y producción.

1. Cedo a la Universidad Nacional de Educación, los derechos exclusivos de reproducción, comunicación pública, distribución y divulgación, pudiendo, por lo tanto, la Universidad utilizar y usar esta obra por cualquier medio conocido o por conocer, reconociendo los derechos de autor. Esta autorización incluye la reproducción total o parcial en formato virtual, electrónico, digital u óptico, como usos en red local y en internet.
2. Declaro que en caso de presentarse cualquier reclamación de parte de terceros respecto de los derechos de autor/a de la obra antes referida, yo asumiré toda responsabilidad frente a terceros y a la Universidad.
3. En esta fecha entrego a la Universidad, el ejemplar respectivo y sus anexos en formato digital o electrónico.

Nombre: Byron Saúl Calahorrano Terán

Firma: \_\_\_\_\_

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



## **1. Introducción**

### **1.A. Intereses y contextualización de su labor docente**

Me llamo Byron Saúl Calahorrano Terán, tengo 51 años de edad, nací el 11 de mayo de 1967, estudié en un colegio tradicional de Quito, donde tuve profesores exigentes y de calidad, formándome como Bachiller en Ciencias especialidad física matemática. He laborado en planteles particulares y fiscales de Quito. Me titulé en la Universidad Central del Ecuador, facultad de filosofía como Licenciado en Ciencias de la Educación, en la escuela de ciencias exactas Especialización Informática. No he tenido la oportunidad de participar en muchos eventos y procesos de formación para mejorar mi cualificación profesional puesto que estaba trabajando a contrato de los padres de familia pero en la actualidad he participado en cursos de capacitación impartidos por el Ministerio de Educación y en mi práctica docente pretendo aplicar los conocimientos e instrumentos intelectuales adquiridos en ellos. Actualmente me desempeño como docente de matemática en la Unidad Educativa “Mitad Del Mundo” en la Básica superior de la jornada Vespertina, con estudiantes que provienen de sectores vulnerables. Donde es necesario conocer las ventajas y desventajas del sistema educativo y buscar técnicas y métodos de enseñanza para aplicar a los alumnos en el aula, para dar una educación pertinente y de calidad.

### **1.B. Estructura del dossier o memoria**

Como resultado del aprendizaje adquirido en la Maestría en Formación del Profesorado, se elabora este dossier que expone los principales aprendizajes adquiridos en cada una de las asignaturas y módulos recibidos. A continuación se presentan los objetivos, los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales a trabajarse en la unidad didáctica por implementarse durante el mes de julio del 2018; la reflexión sobre su puesta en marcha,



en la cual se presentan las principales dificultades evidenciadas en la ejecución de la planificación, la interacción docente – estudiante y las razones que explicarían esas dificultades. Finalmente se presentan las reflexiones finales y un rediseño de la unidad.

## **2. PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA IMPLEMENTADA**

### **2.A. Presentación de objetivos**

#### **Objetivo**

Reforzar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales mediante el planteamiento de procesos de resolución de ejercicios con técnicas cognitivas y metacognitivas, para consolidar y ampliar conocimientos.

Facilitar el aprendizaje significativo de los sistemas de ecuaciones lineales y la utilización adecuada de la tecnología, por medio de estrategias cognitivas.

#### **Objetivos específicos**

- Comprender el concepto de ecuación como una igualdad en la que hay que hallar el valor de la incógnita que la hace verdadera.
- Reconocer un sistema de ecuaciones como dos ecuaciones con dos incógnitas relacionadas entre sí.
- Conocer los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y escribirlos matricialmente.
- Identificar, plantear y resolver problemas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado y especificar las soluciones.

**Aprendizajes esperados: O.M.4.3.** Representar ecuaciones e inecuaciones con una variable; ecuaciones de segundo grado con una variable; y sistemas de dos ecuaciones lineales



con dos incógnitas, para aplicarlos en la solución de situaciones concretas y resolver de manera gráfica y analítica (utilizando las TICs).

## **2.B. Presentación de contenidos y su contextualización en los currículos oficiales.**

Los contenidos a tratarse corresponden al tercer bloque de contenidos del área de Matemática del currículo vigente del Décimo Año de Educación General Básica, y está contextualizado en el currículo oficial, puesto que corresponden a:

### **Eje Curricular Integrador:**

Desarrollar el pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida.

### **Eje del aprendizaje o Macro destreza**

El razonamiento, la demostración, la comunicación, las conexiones y/o la representación.

Los contenidos a desarrollarse son:

### **Contenidos fundamentales:**

- ✓ Sistemas de ecuaciones lineales
- ✓ Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales
- ✓ Resolución de un sistema de ecuaciones
- ✓ Resolución de sistemas por el método gráfico
- ✓ Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones Matemáticas
- ✓ Resolución de sistemas por el método de sustitución
- ✓ Resolución de sistemas por el método de reducción
- ✓ Resolución de sistemas por el método de igualación
- ✓ Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones
- ✓ Resolución de sistemas por la regla de Cramer

## **2.C. Diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje en relación con los objetivos y los contenidos.**

El dominio de las destrezas y el aprendizaje de los contenidos se lograrán si en el proceso didáctico se desarrollan las siguientes actividades:

## 2.D. Presentación de las actividades de evaluación formativa.

Las actividades serán implementadas en 8 sesiones de clases en la unidad cada una de 45 minutos, y 2 sesiones de 90 minutos

## 3.IMPLEMENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

De la implementación de esta unidad didáctica se puede dar como conclusiones que existe una reflexión por parte de quien planifico y como se impartió el conocimiento durante estos meses de trabajo.

### PRIMERA SESIÓN: DENTRO DEL AULA

Para iniciar esta unidad didáctica, pienso que es muy importante motivar a los alumnos y enseñar un modelo didáctico que nos permita trabajar con una forma diferente de una clase expositiva tradicional. De esta manera, e tratado de preparar una sesión introductoria donde se les solicitaría una colaboración comprometida a participar, en este proyecto estableciéndose las normativas generales del proyecto.

**Estrategias Metodológicas: Experiencia concreta.-** Lluvia de ideas, sobre lo que es una ecuación y su utilización. Para activar conocimientos previos y tener un punto de partida.

**Reflexión – Observación.-** Análisis de ejercicios básicos de ecuaciones lineales.

Para la resolución de ecuaciones lineales, trabajara con las actividades de la página 788, del texto Razonamiento algebraico para maestros de Juan D. Godino y Vicenç Font.

4 ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

a)  $x = 1$  es solución de la ecuación  $5x - 3 = 3x + 1$

b)  $x = 2$  es solución de la ecuación  $5x - 3 = 3x + 1$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $5x - 25 = x - 9$     b)  $4x - 2 + 3x = 40$     c)  $5x + 6 = 2x + 12$     d)  $-7 - 6x - 1 = -4x + 10 - x$

e)  $2x - 6 - 8x + 12 = 5 - 4x + 17 - 2 + x$     f)  $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$

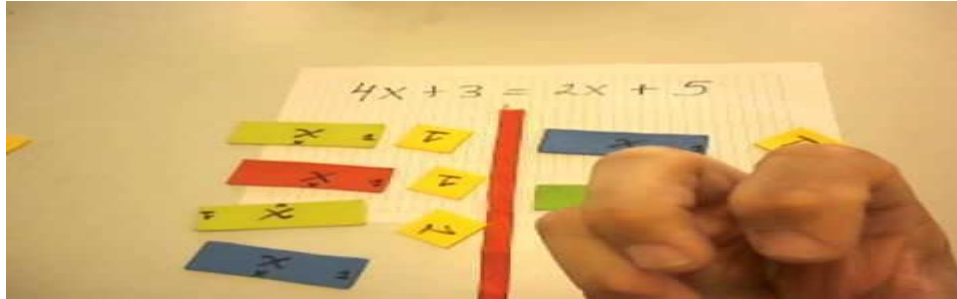
g)  $3(8 - 2x) + 5 = 17 - 2(1 - x)$     h)  $\frac{5x - 50}{2} = 17 - x$     i)  $\frac{5x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{x}{6} = 37$

Fuente: Godino y Font, Razonamiento algebraico





Se utilizará material didáctico, rompecabezas multifuncional, para la resolución de ejercicios y los que propongan los alumnos.



Para trabajar con la balanza se procede a realizar los siguientes pasos

- Dividimos a la ecuación con una cinta, la cual representa el signo igual.  
Esto nos facilita a que la balanza este equilibrada
- Ubicamos en los brazos de la balanza fichas (fomix, cartulina etc.), que representaran a la variable de acuerdo al valor coeficiente, al término independiente lo representamos por el 1 (fomix, cartulina, etc.)
- Empezamos a retirar en ambos brazos una variable hasta que en uno de ellos se hayan terminado la misma , para luego proceder a retirar los numerales 1 de los dos brazos ( propiedad uniforme)
- Luego agrupamos las variables y los numerales para obtener el valor de la incógnita X

### **Conceptualización.** -

Definición y conclusiones de lo que es ecuación.

**Aplicación.**- Resolución de ejercicios, defensa de un ejercicio en grupo.

**Recursos:** Texto Razonamiento algebraico para maestros de Juan Godino y Vincen Font

Computadora e Internet video: <https://youtu.be/d2PwvzdMaGI>

Material Auxiliar del estudiante.



## SEGUNDA SESIÓN: DENTRO DEL AULA: ACTIVIDADES DE REFLEXIÓN

### Ciclo de aprendizaje:

**Prerrequisitos:** Repaso de ecuaciones lineales. Preguntas y respuestas, lluvia de ideas y trabajo en el aula. Este repaso es importante para reconocer una ecuación y poder aplicarle en los sistemas de ecuaciones.

### DESARROLLO DE LA SEGUNDA SESIÓN

En esta sesión se procederá a impartir lo que es un sistema de ecuaciones y sus métodos de solución.

Para esta sesión se procederá a realizar las siguientes actividades:

#### EXPERIENCIA

- ✓ Repaso de la clase anterior mediante las preguntas:

¿Qué es una ecuación lineal?

¿Dónde se aplica una ecuación lineal? Reflexión

- ✓ Relacionar los conceptos anteriores con los nuevos ✓ Presentar y leer un ejercicio.

#### CONCEPTUALIZACIÓN

- ✓ Identificar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

#### APLICACIÓN

- ✓ En esta sesión se realizara un taller con los alumnos la cual se efectuara en parejas (inteligencia interpersonal) y con música de fondo (inteligencia musical), donde elaboraran un organizador gráfico con los métodos de solución.

TERCERA SESIÓN: DENTRO DEL AULA.

TEMA: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO GRÁFICO

TIEMPO: 40 minutos

***BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN***



Los contenidos que se impartirá en esta sesión son los siguientes:

- ✓ Concepto del método gráfico.
- ✓ Interpretación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.
- ✓ Solución de un sistema por método gráfico.
- ✓ ACTIVIDADES A REALIZAR EN ESTA SESIÓN:

Para esta sesión, se utilizará el programa GEOGEBRA y ayudas audiovisuales.

<https://youtu.be/ieiRIATCOUI> (método gráfico)

### DESARROLLO DE LA TERCERA SESION

Para esta sesión se procederá a realizar las siguientes actividades:

#### EXPERIENCIA

Socializar, sobre los métodos de solución de ecuaciones

#### REFLEXIÓN

¿Qué es plano cartesiano?

¿Qué es el método gráfico?

¿En qué y donde se emplea el método gráfico de un sistema de ecuaciones?

#### CONTEXTUALIZACIÓN

Proceso para solucionar el sistema de ecuaciones mediante el método gráfico.

Se realizara un ejercicio aplicando las Tics (Geogebra)



**2 Resolución de sistemas por el método gráfico**

**Matemática TICS**

Grafica sistemas de ecuaciones con **GeoGebra**

A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

- Primero, en el menú **Apariencias**, selecciona la opción **Álgebra y Gráficos**. Después de hacerlo, verás una pantalla como la que se muestra a la derecha.
- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada **Entrada**. En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.
- Al presionar la tecla **Enter**, aparece la gráfica en el plano y la ecuación correspondiente en la ventana al margen izquierdo.
- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.
- Para determinar las coordenadas del punto de intersección pon una cuadrícula a la ventana de las gráficas. Para ello, selecciona en la parte superior derecha el menú **Preferencias: AlB** elige **Vista gráfica**, luego activa la **Cuadrícula** dando clic en la opción **Mostrar cuadrícula**.

Fuente: Texto Ministerio de Educación

## APLICACIÓN

Taller grupal, elaboración ejercicios aplicando el método gráfico.

Elaborar en Geogebra dos ejercicios en casa

Para esta sesión, se utilizará el programa GEOGEBRA y ayudas audiovisuales.

<https://youtu.be/ieiRIATCOUI> (método gráfico)

## DESARROLLO DE LA CUARTA, QUINTA, SEXTA Y SEPTIMA SESIÓN

Métodos de Sustitución, igualación, adición y sustracción,

**Desarrollo:** Explicaciones y ejercicios individuales, ejercicios en grupo formados por seis estudiantes, los cuales presentaran un ejercicio y explicaran el procedimiento aplicado para la solución, observación, trabajos en la casa, investigaciones y todo con guía del docente.

El Docente facilitara ejercicios, uno para cada grupo y solicita que realicen el mismo con los cuatros métodos de solución y defiendan un procedimiento, contesten las interrogantes que

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



surgen en la explicación y analicen si los otros métodos o procedimientos no fueron utilizados por alguna razón en particular.

#### OCTAVA SESIÓN:

Se realizará un debate sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (Gilbert, 2005). Primero, los alumnos realizarán un resumen de los cuatro métodos y un ejemplo de cada uno (inteligencia visual-espacial). A continuación, el profesor planteará un sistema de ecuaciones lineales en la pizarra. Los alumnos tendrán que opinar sobre el método más adecuado para su resolución, argumentando y defendiendo su decisión de manera coherente, convincente y clara (inteligencia lingüística). El profesor, dirigirá a los alumnos, respetando los turnos y realizando preguntas para guiar su discurso.

1) NOVENA SESIÓN: resolución de problemas (inteligencia lógico-matemática). La actividad que más dificultades crea según el trabajo de campo realizado, es el tránsito del lenguaje verbal al algebraico.

Resolución de problemas. Concurso (Gilbert, 2005). Se plantea una competición de problemas de sistemas de ecuaciones lineales. Se preparan equipos nivelados de 6 alumnos. Las condiciones de la competición serán las siguientes:

✓ Los alumnos tienen 5 minutos como máximo para resolver el problema propuesto. ✓ Si antes del tiempo algún grupo consigue resolver el problema, se para el tiempo y nadie puede seguir escribiendo.

✓ Si el resultado es correcto, uno del grupo saldrá a la pizarra a resolver y explicar cómo ha realizado el problema y los miembros del grupo obtienen un punto. De lo contrario, se vuelve a activar el tiempo hasta que otro grupo consiga resolver el problema correctamente.

***BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN***



✓ Al final del concurso, el grupo que más puntos obtenga será el ganador y obtendrá un positivo para la nota de la asignatura.

Mediante esta sesión se consigue trabajar la inteligencia interpersonal, ya que el trabajo se realiza en equipos, dentro de los participantes de cada equipo se cooperará para poder resolver el problema antes que los demás equipos, lo que supone una competición entre grupos.

#### EVALUACIÓN:

**Evaluación:** defensa de un ejercicio en grupo y juego didáctico de recuperación

“crack del algebra” con ejercicios de sistema de ecuaciones.

#### **CRACK DEL ALGEBRA**

Este juego didáctico se enmarca en el 10 EGB, dentro del bloque temático Álgebra, en la unidad didáctica de Ecuaciones, (para motivar a los alumnos a la asimilación de los conceptos)

#### OBJETIVO DIDACTICO DEL JUEGO:

Mediante la práctica de este juego en clase se pretende conseguir que los alumnos practiquen, de manera cooperativa, los objetos matemáticos estudiados en la unidad:

- Resolución de ecuaciones lineales
- Resolución de sistema de ecuaciones
- Potenciar el cálculo mental
- Razonamiento matemático: los alumnos desarrollaran su habilidad y destreza para solucionar ecuaciones de manera rápida, demostrando así el conocimiento y manejo de dichos elementos matemáticos.
- Social y ciudadana: se les incita a participar, establecer interacciones entre ellos, elegir cómo comportarse en el contexto del juego y responsabilizarse de las elecciones adoptadas y del material facilitado para desarrollar el juego.
- Clima de la clase:

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**

Organización espacial: se creara seis grupos de seis alumnos cada uno de ellos, organizados de manera que en cada uno de ellos haya alumnos más y menos aventajados, para facilitar la comprensión y participación por parte de todo el grupo

### MATERIAL

- 25 tarjetas con un sistema de ecuaciones en el anverso y una solución en el reverso
- Un tablero de 5 líneas (una por cada grupo) numerados del 1 al 25
- Cuaderno y esferográfico
- Pizarra y marcadores
- Cinta pegatina de colores para cada equipo, para marcar las puntuaciones.

#### ANVERSO

$2x + y = 1$ $3x + 2y = 4$	$3x - 2y = -2$ $5x + 8y = -60$	$7m - 3n = 15$ $5m + 6n = 27$	$x + y = 30$ $x - y = 8$	$6x - y = 13$ $3x - y = 4$
$2x + y = 7$ $3x - 2y = 14$	$4x - 5y = 22$ $3y = 2x - 10$	$10x - 3y = 16$ $4x - 7y = 18$	$8x + 3y = 5$ $7x - 6y = 1,5$	$3x - 2y = 7$ $5x + 3y = 37$
$5x + 9y = 17$ $x + 4y = 10$	$0,3x - y = 0$ $0,5x + 0,4y = 12,4$	$5x + 2y = -21$ $3x - 4y = 3$	$6s + 5t = 22$ $2s + 7t = -14$	$-8u + 5v = 42$ $7u + 2v = 27$
$3x + 8y = 23$ $11x + 6y = -9$	$2x + y = 4$ $3x + y = 5$	$x - y = -5$ $x + y = 7$	$-10x + 11y = 36$ $4x - 5y = -18$	$13x + 15y = 17$ $-7x + 10y = 27$
$9x + 20y = 33$ $8x + 15y = 21$	$1/3x + 1/2y = 6$ $1/6x - 1/4y = -1$	$x + 2y = 8$ $x - y = -1$	$2x + y = 6$ $3x - y = 4$	$6x - y = 7$ $2x + y = 5$

#### REVERSO

$x = -2$ $y = 5$	$x = -4$ $y = -5$	$m = 3$ $n = 2$	$x = 19$ $y = 11$	$x = 3$ $y = 5$
---------------------	----------------------	--------------------	----------------------	--------------------

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



$x= 4$ $y= -1$	$x=8$ $y= 2$	$x=1$ $y= -2$	$x=$ $1/2$ $y=$ $1/3$	$x= 5$ $y= 4$
$x= -2$ $y= 3$	$x=20$ $y= 6$	$x= -3$ $y= -3$	$s= 7$ $t= -4$	$u= 1$ $v= 10$
$x= -3$ $y= 4$	$x= 1$ $y= 2$	$x=1$ $y= 6$	$x= 3$ $y= 6$	$x= -1$ $y= 2$
$x= -3$ $y= 3$	$x= 6$ $y= 8$	$x=8$ $y=4$	$x= 3$ $y= 6$	$x=$ $1,5$ $y= 2$

Fuente: Juegos didácticos

### TABLERO DE PUNTUACIONES

<b>1º</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
<b>2º</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
<b>3º</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
<b>4º</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
<b>5º</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Fuente: Juegos didácticos

### REGLAS DEL JUEGO:

- 1.- El profesor crea los 6 equipos asignándole un color a cada uno.
- 2.- Se reparte una tarjeta a cada alumno (25 tarjetas).
- 3.- Se sorteará quién empieza leyendo la ecuación del anverso de su tarjeta.
- 4.- Una vez leída la ecuación el profesor la escribirá en la pizarra y todos intentarán Solucionar la en su cuaderno.

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**





- 5.- El primer equipo que obtenga la solución levantará la mano y la dirá. Si es correcta El profesor la escribirá en la pizarra y ese grupo avanzará con la pegatina de su color una casilla. Si es incorrecta retrocederá una casilla o permanecerá en la salida si es la partida inicial.
- 6.- Cada participante mirará el reverso de su tarjeta y el que la tenga escrita en ella levantará la mano y leerá la ecuación que figura en su anverso.
- 7.- Se vuelve a repetir el proceso anterior hasta que todos los alumnos hayan formulado su ecuación.
- 8.- El juego habrá finalizado y ganará aquel grupo cuya ficha esté más avanzada en el tablero.

Finalmente se podrá realizar en la pizarra las operaciones que no hayan quedado claras para alguno de los alumnos.

### Evaluación

RÚBRICA DE EVALUACIÓN				
CRITERIO A VALORAR	MUCHO	BASTANTE	POCO	NADA
Cada componente del grupo ha hecho bien su rol.	x			
El grupo ha participado activamente en el aprendizaje de la destreza	X			
Se han mostrado seguros/as y confiados en sus apreciaciones.		X		

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



Han tenido todo preparado y listo a su tiempo y apoyándose en diferentes recursos incluidas las TIC.		X		
Han valorado positivamente las aportaciones de los demás grupos.		X		
Han terminado la tareas con éxito.		X		

Fuente: Universidad Nacional de Educación

### **3.A. Adecuación de los contenidos implementados a los planificados y adaptaciones realizadas.**

Como todos los años lectivos se realiza una evaluación diagnostica par a determinar el nivel de conocimientos de los estudiantes este resultado nos ayuda a realizar una planificación de partida la cual nos permitirá adecuar los contenidos y aplicar diferentes métodos de enseñanza para todo el año.

Es por esto que los maestros debemos tomar conciencia y cambiar la realidad de la educación en el país, mediante la implementación de métodos y técnicas nuevas.

El libro de texto del Misterio de Educación edición 2016, tiene muchas falencias en donde varios de los ejercicios no dan una explicación o el procedimiento de cómo realizarlos, los cuales dificultan el aprendizaje de los alumnos dentro y fuera del aula. El texto por lo general empieza con ejercicios y problemas básicos, los cuales se resuelve en el aula, pero al enviar los trabajos o realizar los talleres existe ejercicios de difícil solución, es una causa por la cual el contenido no es muy bien asimilado por los alumnos.

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



Al presentar la secuencia didáctica, los contenidos se estudiarán partiendo de la resolución de problemas para luego avanzar en la formación de las competencias o destrezas con criterio de desempeño. Los problemas se convierten en el medio esencial para lograr los aprendizajes. También se adecuan los contenidos orientando a los estudiantes a que elaboren organizadores gráficos para que expongan en la plenaria los sistemas de ecuaciones lineales, construyendo así su propio conocimiento.

Es necesaria la utilización de material concreto como fichas para deducir los procedimientos de solución de ecuaciones un “tablero” anverso y reverso donde constan los ejemplos de los sistemas de ecuaciones con sus soluciones y otra tabla con los puntajes obtenidos en cada grupo de ejercicios para jugar el “Crack de las matemáticas” con el fin desarrollar las habilidades de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales de una forma lúdica, evitando el aburrimiento.

Todas estas adecuaciones ayudaron a optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

### **3.B. Resultados de aprendizaje de los alumnos.**

Los educandos no están enseñados a la práctica de este tipo de actividades diseñadas, toda vez que en su cotidianidad, están acostumbrados a que el profesor de matemática trabaje solo con ejercicios y al estudiante le han tenido como un receptor de estos contenidos y no como un ente productivo y que el busque soluciones.

Al enviarles los trabajos la mayoría de ellos no cumplen con la tarea por lo cual se vuelve complicado seguir adelante en las actividades programadas.

En el caso de los trabajos grupales se organizan de tal manera que cada quien aporta al grupo a través del trabajo, puesto que si bien, están acostumbrados a ejecutar trabajos en grupo en otras disciplinas, el esquema intelectual del estudiante, asocia a la Matemática con actividades



individuales distantes, en las que lo fundamental era la toma de apuntes, sin que estén acostumbrados con el uso de principios escritos en el trabajo o que se discuta lo afirmado por el docente.

En relación a los videos se ha utilizado el instrumento que está a nuestro alcance que es la computadora personal cuando ha sido posible y a veces que se quiso utilizar un infocus por parte del docente no se la pudo utilizar, por no estar disponible en la institución

Por otro lado se detectó que unos estudiantes tiene alguna discapacidad como son visual e intelectual, puesto que durante su proceso de aprendizaje han presentado un bajo rendimiento y bajas calificaciones en todas las áreas, Con los representantes se ha hablado y se ha tratado de darles algunos consejos para el mejoramiento de esas dificultades.

La ejecución de estas actividades en la secuencia didáctica, envuelve un esfuerzo extra,

### **3.C. Descripción del tipo de interacción.**

Los alumnos son muy comunicativos, expresan sin dificultad sus comentarios y dudas, les pareció interesante la experiencia de esta planificación didáctica diferente, se sintieron motivados a colaborar y mostraron mayor interés por el estudio del sistema de ecuaciones porque aprendieron mejor y se comprometieron a trabajar así todo el año lectivo, quieren que se los aplique en cada bloque curricular como una especie de actividad final, además quieren ser evaluados mediante juegos y no con pruebas objetivas.

La relación entre el profesor y el grupo de estudiantes es buena. me han aceptado como un amigo de confianza hasta llegar a contarme historias personales de riesgo. Los alumnos

demuestran mucha afinidad en lo que se les pide; proceden con naturalidad, afecto y alegría, sin mostrar actitudes fuera de lo normal.

### **3.D. Dificultades observadas.**

Al no estar familiarizado con esta forma de enseñar tanto la planificación como la ejecución de las actividades me han tomado más tiempo de lo habitual porque se deben planificar mejor dichas actividades, también debo manifestar que en realidad si es más trabajo para mí pero al ir aplicando las actividades ya no parecen tan difíciles esto me ha dado mayor seguridad como profesor y he aprendido que si es posible aplicar otras formas de enseñanza.

E podido implementar un 75 % de la unidad didáctica en el aula, considero que estado presionado para cumplir con los tiempos previstos para cada actividad puesto que mi secuencia didáctica no ha sido aprobado y me he visto con la necesidad de contar con menos tiempo para hacer la corrección de cada una de las secuencias enviadas. Asimismo, considero que me hubiese cuestionado sobre las razones por las cuales los estudiantes no saben aplicar correctamente los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones.

## **4. VALORACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN Y PAUTAS DE REDISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA**

La ejecución de esta nueva manera de planificar ha sido positiva debido a que se propone rutinas nuevas a la que están habituados los alumnos, han tenido una gran motivación para ser más participativos y han desarrollado la imaginación y la memoria para resolver situaciones y a juzgar los hechos con bases y argumentos mejor fundamentados ya que al disponer de más fuentes de información tienen un criterio más amplio de los temas en cuestión, han aprendido a procesar y a interpretar información para llegar a sus propias conclusiones y aprendizajes.

*BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN*



Quizá la parte de la planificación que merece más atención sigue siendo la de dosificar en menor cantidad los trabajos grupales y dar más espacio para que expresen sus puntos de vista en el aula.

Reflexiono que al realizar la unidad didáctica es necesario aumentar el tiempo establecido a las diferentes etapas, utilizando el lapso propuesto para las actividades de transmisión y aplicación, del refuerzo.

Es necesario desarrollar los contenidos procedimentales de la unidad didáctica con otras actividades que incumban al pensamiento reflexivo, que son relacionados con la destreza didáctica y que facilitarían el logro de las destrezas previstas en la unidad, entre otras: Investigar la fiabilidad de las fuentes, razonar deductivamente.

Asimismo es conveniente aumentar como actividad que se realice resoluciones de problemas.

#### **4.A. Valoración de la unidad didáctica y propuestas de mejora, siguiendo las pautas que cada especialidad ha proporcionado para guiar la práctica reflexiva.**

La ejecución de esta nueva manera de planificar ha sido positiva debido a que se propone rutinas nuevas a la que están habituados los alumnos, han tenido una gran motivación para ser más participativos y han desarrollado la imaginación y la memoria para resolver situaciones y a juzgar los hechos con bases y argumentos mejor fundamentados ya que al disponer de más fuentes de información tienen un criterio más amplio de los temas en cuestión, han aprendido a procesar y a interpretar información para llegar a sus propias conclusiones y aprendizajes.

Quizá la parte de la planificación que merece más atención sigue siendo la de dosificar en menor cantidad los trabajos grupales y dar más espacio para que expresen sus puntos de vista en el aula.

*BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN*



Reflexiono que al realizar la unidad didáctica es necesario aumentar el tiempo establecido a las diferentes etapas, utilizando el lapso propuesto para las actividades de transmisión y aplicación, del refuerzo.

Es necesario desarrollar los contenidos procedimentales de la unidad didáctica con otras actividades que incumban al pensamiento reflexivo, que son relacionados con la destreza didáctica y que facilitarían el logro de las destrezas previstas en la unidad, entre otras: Investigar la fiabilidad de las fuentes, razonar deductivamente.

Asimismo es conveniente aumentar como actividad que se realice resoluciones de problemas.

## 5. REFLEXIONES FINALES

Luego de poder aplicar en os estudiantes metodologías didácticas en busca de reforzar y mejorar, así como facilitar conocimientos en el área de matemática, se puede observar que los que ellos necesitan es que el maestro despierte su iteres desde el mundo practico que ellos manejan, por ejemplo las actividades lúdicas

### 5.A. En relación a las asignaturas troncales de la maestría

Las diferentes asignaturas de conocimientos genéricos y específicos del área de matemática, han tenido como objetivo capacitarnos en la maestría para Profesores de Educación Secundaria en la especialidad de Matemática, estas asignaturas se dividieron en dos módulos y son:

“Fundamentos Psicopedagógicos”, que se comenzó con las siguientes asignaturas:

1. Sociología de la Educación; se estudió el impacto social e histórico que tiene la educación, cuya función es, formar el capital humano al transformar sus conocimientos.

*BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN*



Se recapacitó sobre sus funciones explícitas y latentes y su expresión en los currículos formal y oculto. Se estableció que la educación es una misión de todos, a través del currículo impone relaciones de poder, autoridad, normas, valores, legitima la alta cultura oficial para garantizar el desarrollo de individuos, capaces, abiertos a los cambios, preparados para la vida adulta, en disciplina, puntualidad, orden, rutina, sumisión, etcétera, a veces la educación puede llegar a ser excluyente y reproductora de las clases sociales, que el docente es un intelectual práctico, que los cambios educativos se logran desde adentro.

Para cumplir con esta misión la educación debe ser dinámica, corporativa, equitativa, emprendedora, cálida, integradora y eficiente. Sus profesores educarán con calidad, calidez, espíritu de superación, exigencia académica, atendiendo a la diversidad cultural, participando en la comunidad y trabajando en equipo. Los alumnos deben ser solidarios, trabajar en equipo, tener buena autoestima, usar adecuadamente las TIC y las TAC dentro y fuera del aula, si conjugamos todos estos elementos en realidad aprender siempre será una experiencia maravillosa.

2. La Psicología en la educación secundaria, nos permite recapacitar que trabajamos con adolescentes quienes por su edad se hallan en una etapa de desconcierto en sus emociones, autoestima, metas, cambios, identidad, incomprensión, curiosidad, conflictos e independencia, en esta disciplina se analizó el modelo de avance de los adolescentes a través de competencias donde en ellos juega mucho el papel de su entorno, la escuela y el hogar, por eso es muy importante guiarles para que superen con éxito estos problemas y en lo académico debemos enseñarles métodos y técnicas que les permitan construir su propio conocimiento al comprobar la información a veces

***BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN***





no argumentada, para que se formen con espíritu crítico investigativo, es fundamental reflexionar los conocimientos previos del estudiante para que los refuerce y cambie de acuerdo a sus intereses y necesidades, pues el propósito de la educación es cambiar la forma de pensar y actuar hacia la sociedad y con el medio en que vivimos, siendo necesario aplicar diversos modelos pedagógicos para llegar al alumno de mejor manera y así obtener su participación activa, la planificación didáctica no debe descuidar esta fase por la que atraviesan los estudiantes, caso contrario nos traerá numerosos inconvenientes.

3. La labor del tutor es la de proceder como representante del curso en las diferentes reuniones de profesores o juntas de curso, el tutor debe tomar en cuenta la interculturalidad y la inclusión educativa, también es un orientador o guía de las diferentes formas de enseñanza-aprendizaje: visual, musical, verbal, físico, matemático, social, individual, para ello es necesario tener una carpeta personal del estudiante donde se registrara la información que nos permitan conocer más, acerca de su personalidad (alegre, triste, tímido, sus intereses, aptitudes, motivaciones, etc)

Esta información nos permitirá dar soluciones inmediatas a los problemas del curso y de ser posible transformar las emociones negativas en positivas, el tutor para su trabajo debe elaborar un PAT, Plan de Acción Tutorial, el cual debe estar en concordancia con los intereses del alumnado, se abordar temas del currículo oculto que son de gran importancia para la formación integral del estudiante, la comunicación eficiente entre el tutor, los estudiantes, las autoridades del plantel, los padres de familia y los demás docentes que imparten clases en un determinado curso, es clave para precisar ciertas novedades que pudieran suscitarse y así juntos buscar alternativas y soluciones adecuadas.

Dificultades en el ejercicio de la tutoría:

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



- Equipo directivo.- Poco preocupado por la tutoría, ausencia de planificación tutorial.
  - Falta de colaboración y de trabajo en equipo con el resto de profesorado.
  - Falta de instrumentos y materiales tutoriales en el centro
  - Falta de formación más valor a lo académico o instrucción del tutor
  - Falta de colaboración e interés de las familias.
4. Metodología Didáctica de la Enseñanza, se conceptualizó y caracterizó al aprendizaje reflexivo – experiencial, realizar buenas prácticas educativas entre ellas: motivar al alumno, fomentar y facilitar la construcción del conocimiento, para romper modelos pedagógicos que reproducen círculos viciosos, se ejemplificaron estrategias participativas para el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal. Se realizó un ejemplo de feedback la cual se la puede realizar mediante preguntas, Se analizó la comunicación didáctica enfatizando en la sintonía y la retroalimentación. el docente debe dominar bien el contenido, mirar siempre a los ojos, usar los gestos, el timbre y el volumen de voz adecuadamente pues estos dicen mucho, debe evitar monopolizar el uso de la palabra, los conocimientos deben contener objetivos conceptuales, procedimentales y actitudinales, así mismo la evaluación debe ser inicial, continua y final y debe servir para obtener información, reflexionar y tomar decisiones para mejorar, se determinó a la evaluación como un proceso de recolección de información que posibilitará tomar decisiones razonables sobre el proceso educativo.

5.- El sistema educativo ecuatoriano para una educación intercultural, se encuentran enfrentando una era digital y a una globalización sin antecedentes, por lo tanto las instituciones educativas tienen nuevos desafíos, como son, cambiar los paradigmas educativos en el siglo XXI, el alumno de hoy necesita jerarquizar, interpretar, comunicar

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



y evaluar la información que la puede encontrar en cualquier lado. A mi parecer estos trabajos realizados con los alumnos, no evalúan los aprendizajes de los educandos, sino la capacidad de concebir y solucionar problemas, a partir de la aplicación de conocimientos, es indispensable educar de un modo diferente renunciando al memorismo y desarrollando competencias, destrezas y conocimientos que demanda la sociedad actual y venidera para salir del subdesarrollo, no es suficiente conocer los problemas sus causas y consecuencias, sino es necesario darles solución inmediata.

## 6 Investigación

Este tema nos facilitó identificar la dimensión de la experiencia profesional durante nuestro trabajo, nos permite reflexionar sobre alternativas que nos permita elaborar un protocolo de investigación, y nos permite diferenciar varios paradigmas epistemológicos para aclarar una posición epistemológica en toda investigación.

Innovación e investigación sobre la propia práctica

### **5.B. En relación a las asignaturas de la especialidad**

Didáctica de la Matemática de Media Superior, de secundaria I II .

Las didácticas nos instruyen como se debe enseñar, utilizando herramientas, técnicas y métodos para la misma. Son habilidades que nos permiten afianzar los aprendizajes, de los contenidos matemáticos, estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje, mediante la utilización de técnicas y métodos de enseñar.

Conocimos que la didáctica nos ayuda a planificar, ejecutar las estrategias necesarias para el aprendizaje, que existen una gran variedad de estrategias que generan el interés y permiten motivar el trabajo, mediante la utilización de juegos matemáticos, esto nos facilita que la clase sea interactiva, atractiva e innovadora, permitiendo una autoevaluación, coevaluación, dando como resultados alumnos responsables y críticos.

***BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN***

También se estudió lo que es una competencia matemática, las categorías de demanda cognitiva la cual nos permite identificar el tipo de conocimiento que se puede aplicar en la resolución de los problemas, conociendo cuatro categorías que son:

- Memorización, que es una categoría de bajo nivel puesto que reproduce reglas, procedimientos aprendidos previamente, no tiene conexión con los conceptos o significados que son el fundamento de las reglas.
- Procedimiento sin conexiones, igual es de bajo nivel, son algorítmicas, no hay conexión con los conceptos, se enfoca en producir respuestas correctas y no ha desarrollado una comprensión matemática.
- Procedimientos con conexiones. Es de alto nivel. Usa procedimientos, requiere de un esfuerzo cognitivo, los estudiantes lo relacionan con ideas y procedimientos.
- Hacer matemáticas, es de alto nivel y la más completa, requiere de un pensamiento complejo, que el alumno explore, de una auto regulación

Cuando trabajamos en Innovación sobre la propia práctica se estudió los estándares de calidad de los procesos de inter-aprendizaje de las matemáticas, permitiéndome proyectar a buscar diversas maneras, métodos para mejorar mi formación académica y tener un mejor desempeño en mis actividades diarias como docente, considerando que las tendencias actuales nos han hecho concientizar que la enseñanza de la matemática nos permite concluir que la misma induce, describe, explica y nos permite aplicar en el diario vivir de las personas.

El currículo nos ayuda a conseguir nuestros objetivos del aprendizaje, llegando a determinar que la matemática debe ser impartida como una propuesta de la nueva educación.

En Complementos Disciplinarios en Matemática II.

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



Se fortaleció, y profundizó algunos campos como son los conjuntos numéricos, la teoría de los números, crear un contexto histórico donde vimos que se puede estudiar a personajes relevantes de la historia y sus aportaciones en la matemática. Es un recurso que nos permitió trabajar mediante la lectura de cuentos, historias, o fragmentos literarios para tener conocimiento y reflexionar sobre las lecturas matemáticas.

Se trató sobre la actividad de los tres actos

Se estudió también en complementos I, el principio de inducción para aplicar a los alumnos de bachillerato, lo que es un número amigo, la aplicación de los números complejos, lo que es una ecuación cúbica.

En conclusión puede deducir que el docente debe conocer la realidad de los estudiantes, para que se involucren de una mejor forma a la solución de problemas, a través del razonamiento, la reflexión, para que no tengan mucha dificultad en la aplicación de la vida diaria tanto estudiantil como personal.

Se trabajó las Matemática relacionada en las Funciones, el Álgebra, la Geometría, la estadísticas y probabilidades.

### **5.C. En relación a lo aprendido durante el TFM**

He logrado adquirir muchos conocimientos como son técnicas metodológicas para enseñar y los cuales espero aplicar durante el tiempo que me quede como maestro a mis estudiantes, no es una tarea fácil pues no estaba acostumbrado a planificar de forma diferente pero mediante la práctica espero aprender a realizar bien mi trabajo es cuestión de tener, voluntad y amor de hacer bien las cosas y de que si es posible hacerlo.

***BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN***



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- a) *Gonzales M.O. y Mancill J.D. (1962). Álgebra Elemental Moderna. Quito: LIBRESA.*
- b) *Ministerio de Educación. (2016). Matemática décimo año EGB . Texto del estudiante. Quito: Editorial Don Bosco.*
- c) *Los videos son para trabajar con los alumnos,*

### **Referencias electrónicas.**

- d) *Anderson, 2015. Método de Igualación. Recuperado de: <https://youtu.be/ITRANviJWEY>*
- e) *F. Ximeno, 2013, Matrices en GeoGebra, Recuperado de: <https://youtu.be/XwfZIIHU8FQ>*
- f) *Julio, 2009. Sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  por método de sustitución  
Recuperado de : <https://youtu.be/3FHhPLVUt9o>( sustitución)*
- g) *Julio, 2010, sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  por método de Cramer,  
Recuperado de: <https://youtu.be/yvrpljpbodu>*
- h) *Julio, 2012, Sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  por método gráfico,  
Recuperado de: <https://youtu.be/ieiRIATCOUI>*
- i) *Math2me, 2010, Recuperado de: Método de suma / resta o reducción (sistemas lineales  $2 \times 2$ ) <https://youtu.be/ZvTEQdZRnEU>(suma y resta)*
- j) *Miguematemáticas, 2016, Método de Gauss para un sistema  $2 \times 2$ , Recuperado de:  
[https://youtu.be/OE8e70VO\\_CE](https://youtu.be/OE8e70VO_CE)*
- k) *Math2me, 2014, Métodos de factorización, Recuperado de:  
<https://www.youtube.com/watch?v=ROGt8u81Fxm>*
- l) *Sabiduria virtuosa, 2015, Juego de matemáticas con tablero de cien, Recuperado de:  
[https://www.google.com.ec/search?tbm=isch&q=tablero+de+ecuaciones&chi ps=q:juego+de+tablero,g\\_5:matematico](https://www.google.com.ec/search?tbm=isch&q=tablero+de+ecuaciones&chi ps=q:juego+de+tablero,g_5:matematico)*
- m) *Torres N. 2015, RUTINAS DE PENSAMIENTO | thinkingforthechange, Recuperado de: [thinkingforthechange.wordpress.com/rutinas](http://thinkingforthechange.wordpress.com/rutinas)*

### **Docente**

- n) *Godino y Font (2003), Razonamiento algebraico y su dinámica para maestros,  
Recuperado de:  
[https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/3147/Johana\\_Orbe\\_Kortazar.p](https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/3147/Johana_Orbe_Kortazar.p)*

**BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN**



## **AUTOEVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES ADQUIRIDOS**

Utilizando la rúbrica que se proporcionará como complemento de esta guía, elabore una autoevaluación general de los aprendizajes adquiridos como consecuencia de la realización de este TFM; incluyendo una calificación numérica entre 2 y 1,5 puntos.

***BYRON SAÚL CALAHORRANO TERÁN***

	Apartados	Indicadores	A	B	C	D	Puntuación (0-10)
AUTOEVALUACIÓN DEL ESTUDIANTE	Actividades realizadas durante la elaboración del TFM	Tutorías presenciales	Falté a las tutorías sin justificar mi ausencia.	Falté a las tutorías presenciales y sí justifico mi ausencia.	Asistí a las tutorías presenciales sin prepararlas de antemano.	Asistí a las tutorías presenciales y preparé de antemano todas las dudas que tenía. Asimismo, planifiqué el trabajo que tenía realizado para contrastarlo con el tutor/a.	10
		Tutorías de seguimiento virtuales	Ni escribí ni contesté los mensajes del tutor/a.	Fui irregular a la hora de contestar algunos mensajes del tutor/a e informarle del estado de mi trabajo.	Contesté todos los mensajes virtuales del tutor/a y realicé algunas de las actividades pactadas en el calendario previsto.	Contesté todos los mensajes virtuales del tutor/a realizando las actividades pactadas dentro del calendario previsto y lo he mantenido informado del progreso de mi trabajo.	8
	Versión final del TFM	Objetivos del TFM	El trabajo final elaborado no alcanzó los objetivos propuestos o los ha logrado parcialmente.	El trabajo final elaborado alcanzó la mayoría de los objetivos propuestos.	El trabajo final elaborado alcanzó todos los objetivos propuestos.	El trabajo final elaborado alcanzó todos los objetivos propuestos y los ha enriquecido.	8
		Estructura de la unidad didáctica implementada	La unidad didáctica implementada carece de la mayoría de los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación).	La unidad didáctica implementada contiene casi todos los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación).	La unidad didáctica implementada contiene todos los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación).	La unidad didáctica implementada contiene todos los elementos de la programación (objetivos, contenidos según el currículum, actividades de enseñanza y aprendizaje y actividades de evaluación) y además incluye información sobre aspectos metodológicos, necesidades educativas especiales y el empleo de otros recursos.	10
		Implementación de la unidad didáctica	El apartado de implementación carece de la mayoría de los aspectos	El apartado de implementación contempla casi todos los aspectos solicitados (adecuación de	El apartado de implementación contempla todos los aspectos solicitados (adecuación de	El apartado de implementación contempla todos los aspectos solicitados (adecuación de contenidos, dificultades de aprendizaje	10





		solicitados (adecuación de contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, observación de la interacción sobre las dificultades halladas inherentes a la actuación como profesor).	contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, observación de la interacción sobre las dificultades halladas inherentes a la actuación como profesor).	contenidos, dificultades de aprendizaje advertidas, observación de la interacción sobre las dificultades halladas inherentes a la actuación como profesor).	advertidas, gestión de la interacción y de las dificultades en la actuación como profesor), además de un análisis del contexto y de las posibles causas de las dificultades.	
	Conclusiones de la reflexión sobre la implementación	Las conclusiones a las que he llegado sobre la implementación de la unidad didáctica son poco fundamentadas y excluyen la práctica reflexiva.	Las conclusiones a las que he llegado están bastante fundamentadas a partir de la práctica reflexiva, pero algunas resultan difíciles de argumentar y mantener porque son poco reales.	Las conclusiones a las que he llegado están bien fundamentadas a partir de la práctica reflexiva, y son coherentes con la secuencia y los datos obtenidos.	Las conclusiones a las que he llegado están muy bien fundamentadas a partir de la práctica reflexiva porque aportan propuestas de mejora contextualizadas a una realidad concreta y son coherentes con todo el diseño.	10
	Aspectos formales	El trabajo final elaborado carece de los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.) y no facilita su lectura.	El trabajo final elaborado casi cumple los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.), pero su lectura es posible.	El trabajo final elaborado cumple los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.) y su lectura es posible.	El trabajo final elaborado cumple los requisitos formales establecidos (portada con la información correcta, índice, paginación, diferenciación de apartados, interlineado que facilite la lectura, etc.) y ha incorporado otras que lo hacen visualmente más agradable y facilitan la legibilidad.	10



		Redacción y normativa	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales dificultan la lectura y comprensión del texto. El	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales facilitan casi siempre la lectura y comprensión del texto. El texto contiene algunas carencias de la normativa española.	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales ayudan a la lectura y comprensión del texto. El texto cumple con los aspectos	La redacción del trabajo, la distribución de los párrafos y los conectores textuales ayudan perfectamente a la lectura y comprensión del texto. El texto cumple con los aspectos normativos de la lengua española y su lectura es fácil y agradable.	10
			texto contiene faltas graves de la normativa española.		normativos de la lengua española, salvo alguna errata ocasional.		
		Bibliografía	Carece de bibliografía o la que se presenta no cumple los requisitos formales establecidos por la APA.	Se presenta una bibliografía básica que, a pesar de algunos pequeños errores, cumple los requisitos formales establecidos por la APA	Presenta una bibliografía completa y muy actualizada, que cumple los requisitos formales establecidos por la APA.	Presenta una bibliografía completa y muy actualizada, que cumple los requisitos formales establecidos por la APA de forma excelente.	10
		Anexo	A pesar de ser necesaria, falta documentación anexa o la que aparece es insuficiente.	Hay documentación anexa básica y suficiente.	Hay documentación anexa amplia y diversa. Se menciona en los apartados correspondientes.	La documentación anexa aportada complementa muy bien el trabajo y la enriquece. Se menciona en los apartados correspondientes.	10
		Reflexión y valoración personal sobre lo aprendido a lo largo del máster y del TFM	No reflexioné suficientemente sobre todo lo que aprendí en el máster.	Realicé una reflexión sobre lo aprendido en el máster y sobre la realidad educativa.	Realicé una buena reflexión sobre lo aprendido en el máster y sobre la realidad educativa. Esta reflexión me ayudó a modificar concepciones previas sobre la educación secundaria y la formación continuada del profesorado.	Realicé una reflexión profunda sobre todo lo aprendido en el máster y sobre la realidad educativa. Esta reflexión me ayudó a hacer una valoración global y me sugirió preguntas que me permitieron una visión nueva y más amplia de la educación secundaria y la formación continuada del profesorado.	10

**Nota final Global (sobre 1.5)**

1.5

## ANEXOS

### CONTENIDO A DESARROLLAR PRIMERA CLASE

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad en la

que hay un número desconocido, normalmente representado por la letra

X, llamada incógnita, que no está elevada al cuadrado, ni al cubo.

Por ejemplo:  $2x+6 = 8$ . Una expresión del tipo  $2x^2+6 = 8$  no es una ecuación de primer grado con una incógnita porque la incógnita está elevada al cuadrado, mientras que una expresión del tipo  $2x+6+y = 8$  tampoco lo es porque hay dos incógnitas: la x y la y.

En la ecuación  $2x + 6 = 8$  la igualdad es verdadera para un determinado valor de la incógnita:  $x = 1$

$$2(1) + 6 = 8$$

A este valor se le llama solución de la ecuación. Si sustituimos la x por un número que no es solución, no se cumple la igualdad. Por ejemplo, si sustituimos x por 2, tenemos:

$$2(2) + 6 \neq 8$$

La solución de la ecuación  $2x+6 = 8$  es  $x = 1$  y la solución de la ecuación  $x+3 = 4$  también es  $x = 1$ . En este caso se dice que las ecuaciones  $2x+6 = 8$  y  $x+3 = 4$  son equivalentes. Las ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Hay transformaciones que permiten obtener ecuaciones equivalentes:

- La ecuación inicial y la que resulta de sumar o restar el mismo número en los dos miembros de la igualdad son equivalentes.
- La ecuación inicial y la que resulta de multiplicar o dividir por el mismo número (diferente de cero) los dos miembros de la igualdad son equivalentes.

Resolver una ecuación con una incógnita consiste en hallar la solución. Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se hacen las transformaciones que sean necesarias hasta llegar a una ecuación equivalente del tipo  $ax = b$ . Para conseguirlo, se trasponen todos los términos que tienen incógnita a un lado de la igualdad y todos los que no la tienen al otro; después se efectúan las operaciones indicadas hasta llegar a una ecuación del tipo  $ax = b$ , que se resuelve despejando la incógnita.

Ejemplo:

Ecuación inicial:  $4x - 13 + 2x = 3x - 4$

Trasponemos, con el signo cambiado, los términos que tienen  $x$  a un lado y los que no tienen al otro:  $4x + 2x - 3x = -4 + 13$

Efectuamos las operaciones indicadas:  $3x = 9$

Despejamos a incógnita:  $x = 9/3$

La solución es:  $x = 3$

### Razonamiento algebraico para maestros

Generalmente, una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una única solución, pero hay excepciones. Por ejemplo,  $5x - 4 = 5x$  es una ecuación sin solución, porque es imposible que, restando cuatro a un número, obtengamos este mismo número.

Por otra parte hay ecuaciones como, por ejemplo,  $5x + 7 - 3 = 5x + 4$  que tienen infinitas soluciones porque la igualdad se cumple para cualquier valor de la incógnita. Si en el primer miembro sustituimos  $7 - 3$  por  $4$ , la ecuación anterior se convierte en:  $5x + 4 = 5x + 4$ . Esta igualdad se verifica para cualquier valor de  $x$  porque en realidad lo que afirma esta igualdad es que un número ( $5x + 4$ ) es igual a él mismo y esto se cumple siempre.

### TAREA

4 ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

a)  $x = 1$  es solución de la ecuación  $5x - 3 = 3x + 1$   
b)  $x = 2$  es solución de la ecuación  $5x - 3 = 3x + 1$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $5x - 25 = x - 9$     b)  $4x - 2 + 3x = 40$     c)  $5x + 6 = 2x + 12$     d)  $-7 - 6x - 1 = -4x + 10 - x$   
e)  $2x - 6 - 8x + 12 = 5 - 4x + 17 - 2 + x$     f)  $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$   
g)  $3(8 - 2x) + 5 = 17 - 2(1 - x)$     h)  $\frac{5x - 50}{2} = 17 - x$     i)  $\frac{5x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{x}{6} = 37$

Trabajando con el material didáctico





1

## Sistemas de ecuaciones lineales

### Explora

Para ingresar a una universidad se aplica una prueba de razonamiento que consta de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se asignan cinco puntos, pero por cada respuesta incorrecta (o que no se responda) se restan dos puntos.



• Si un aspirante obtuvo 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió bien?

La situación planteada en el Explora resulta interesante, pues es posible pensar en un método de tanteo para solucionarla. Si el aspirante respondió quince preguntas bien y quince mal, el siguiente sería el esquema para el razonamiento:

$$\underbrace{15 \text{ preguntas} \cdot 5 \text{ puntos}}_{\text{Preguntas correctas}} - \underbrace{15 \text{ preguntas} \cdot 2 \text{ puntos}}_{\text{Preguntas incorrectas}} = 45 \text{ puntos}$$

De esta manera puede razonarse hasta encontrar una solución. Sin embargo, si se analiza el problema desde el punto de vista del álgebra, puede plantearse la "m" como la cantidad de las preguntas respondidas correctamente y "r" la de las preguntas respondidas de forma incorrecta. Así, el problema puede expresarse como sigue:

$$5m - 2r = 94 \quad \text{y} \quad m + r = 30.$$

Si se analizan simultáneamente las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que son las condiciones del problema, se concluye que el aspirante respondió bien 22 preguntas.

Las expresiones  $5m - 2r = 94$  y  $m + r = 30$  conforman un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución es:  $m = 22$  y  $r = 8$ .

Plantear y resolver un sistema de ecuaciones permite resolver situaciones en las cuales se involucran varias incógnitas que están relacionadas por condiciones específicas.

### 1.1 Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales

Antes de explicar cómo resolver los sistemas de ecuaciones, vale la pena aclarar ciertos términos propios de la terminología del álgebra.

Para indicar un sistema de ecuaciones se utiliza el signo  $\{$  y se escriben las ecuaciones una debajo de la otra, como se indica a continuación (Figura 1).

$$\begin{cases} 5m - 2r = 94 \\ m + r = 30 \end{cases} \quad \text{Figura 1}$$

Un sistema de ecuaciones puede ser  $2 \times 2$  si involucra dos ecuaciones y dos incógnitas. Asimismo puede ser  $3 \times 3$  si involucra tres ecuaciones y tres incógnitas o  $n \times n$  si involucra  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales hace referencia a encontrar los valores de las incógnitas que verifiquen, simultáneamente, las ecuaciones. Teniendo en cuenta esto, los sistemas pueden clasificarse así:

- **Compatibles.** Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:
  - **Compatibles determinados.** Aquellos para los cuales hay una única solución.
  - **Compatibles indeterminados.** Aquellos que tienen infinitas soluciones.
- **Incompatibles.** Aquellos que carecen de solución.

#### Ejemplo 1

El sistema planteado para modelar la situación inicial es compatible determinado, pues para resolverlo, solo se determina que:  $m = 22$  y  $r = 8$ . De la misma forma, y sin saber ningún método de solución, puede determinarse que el sistema conformado por las ecuaciones  $m + n = 3$  y  $2m + 2n = 3$  es incompatible, pues no hay valores que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones.

#### Ten en cuenta

En algunos libros asignan otros nombres para clasificar los sistemas de ecuaciones según sus soluciones. Investiga qué otros nombres reciben.



## SEGUNDA SESION

**Destaca en el aula de aprendizaje:** Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica.

### 1.2 Resolución de un sistema de ecuaciones

En este subtema se trabajarán los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones  $2 \times 2$ , pero cabe anotar que varios de estos sirven además para solucionar los sistemas  $3 \times 3$  y, con algunas variaciones, también para solucionar sistemas  $n \times n$ .

Antes de hablar acerca de cómo solucionar un sistema de ecuaciones, es importante aclarar que solo puede determinarse que la solución de dicho sistema es correcta al evaluar las dos ecuaciones con los valores determinados para las incógnitas. Si las ecuaciones se verifican, la solución es correcta; de lo contrario, la solución es incorrecta.

Para el problema planteado se encontró que  $m = 22$  y  $r = 8$ . Al verificar los valores del sistema propuesto se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 22 - 2 \cdot 8 = 94$$

$$m + r = 30 \Rightarrow 22 + 8 = 30$$

Puede determinarse que  $m = 15$  y  $r = 15$  (como se planteó al inicio de la unidad) no es una solución para el sistema, pues para la primera ecuación, se tiene que:

$$m + r = 30 \Rightarrow 15 + 15 = 30$$

Mientras que para la segunda ecuación, se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 45$$

Aunque se verifica la ecuación  $m + r = 30$ , puede observarse que para la ecuación  $5m - 2r = 94$ , los valores no proporcionan una igualdad; por esta razón no son una solución del sistema planteado.

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  y el uso de cada uno de ellos depende de las condiciones del sistema y de la habilidad propia de cada uno para utilizarlo. Los métodos son:



A continuación se presentan algunas particularidades de cada método.

- **Sustitución, reducción e igualación.** Estos métodos tienen un componente algebraico importante; para usarlos, se interpreta cada expresión de forma similar a una ecuación, por tal razón se usa la propiedad uniforme de la igualdad y se respeta el orden en el que se despeja una incógnita en la ecuación.
- **Regla de Cramer.** Con este método se solucionan sistemas de ecuaciones partiendo del uso de los coeficientes numéricos de cada incógnita. De esta manera, se "obvia" el proceso algebraico para usar un algoritmo aritmético en la solución.
- **Método de Gauss.** Es una generalización del método de reducción.

Cada uno de los métodos se explicará con mayor detalle en los siguientes temas de la unidad.

APRENDA A EDUCARSE UN

#### CULTURA del Buen Vivir

##### El optimismo

Cuando una persona analiza desde una perspectiva optimista las diversas situaciones que enfrenta en la vida, encuentra más rápidamente las soluciones a los problemas que se le presentan.

- Piensa en qué le aconsejarías a tu mejor amigo cuando tiene serias dificultades para entender los temas de matemáticas.

##### Ten en cuenta

Según la propiedad uniforme de la igualdad, pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse en ambos miembros de una igualdad por un mismo número y la igualdad se conserva.



La interpretación gráfica de la solución de una ecuación del sistema como puntos de una recta y la interpretación gráfica de la solución de un sistema como los puntos en común de las rectas nos permite ver que sólo existen tres posibilidades: 1) que las rectas se corten, 2) sean paralelas o 3) sean la misma. Atendiendo a esta clasificación, un sistema sólo puede ser compatible determinado (una única solución), incompatible (ninguna solución) o bien compatible indeterminado (infinitas soluciones).

A continuación se muestran gráficas de los diferentes tipos de sistemas:

**Compatible determinado:**  
Cuando las rectas se cortan en un punto.

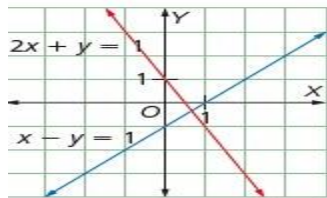


Figura 2

**Compatible indeterminado:**  
Cuando las rectas se cortan en infinitos puntos (misma recta).

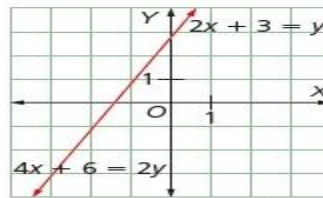


Figura 3

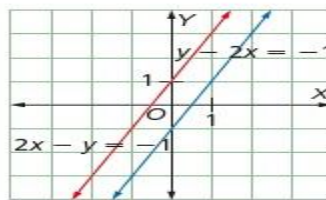


Figura 4

**Incompatible:**  
Cuando las rectas son paralelas.



TERCERA SESION

2

Resolución de sistemas por el método gráfico

Explora

Para llenar un tanque de 31 m<sup>3</sup> se abren dos llaves, simultáneamente. Una de ellas se cierra siete minutos después de abrirla y la otra, dos minutos después. Luego, se llena un tanque de 27 m<sup>3</sup> con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a los cuatro minutos de abrirla y la segunda, a los tres minutos.



• ¿Cuántos litros salen de cada llave en un minuto?

En la situación presentada en el Explora puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo,  $x$  y  $y$ .

Según las condiciones del problema, la relación entre  $x$  y  $y$ , puede expresarse así:

Para el tanque de 31 m<sup>3</sup>:  $7x + 2y = 31$

Para el tanque de 27 m<sup>3</sup>:  $4x + 3y = 27$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la solución del sistema analizando cada ecuación como una recta y por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersectan en un solo punto.

Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el anterior sistema de ecuaciones, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones de la forma  $y = mx + b$  punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \qquad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Para la primera ecuación se tiene que:  $m = -\frac{7}{2}$  y  $b = \frac{31}{2}$

Para la segunda ecuación se tiene que:  $m = -\frac{4}{3}$  y  $b = 9$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

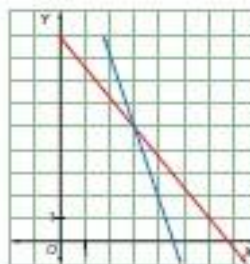


Figura 1

En la Figura 1, se observa que el punto en el cual se intersectan las dos rectas es (3, 5); es decir la solución del sistema es  $x = 3$ ;  $y = 5$ .

Por lo tanto, de la primera llave salen 3 litros de agua en un minuto y de la segunda salen 5 litros de agua en un minuto.

Ten en cuenta

Es posible hacer las gráficas de las rectas usando dos puntos; en la situación de la sección Explora, se usa la aplicación de la ecuación punto-pendiente.

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.



Figura 1

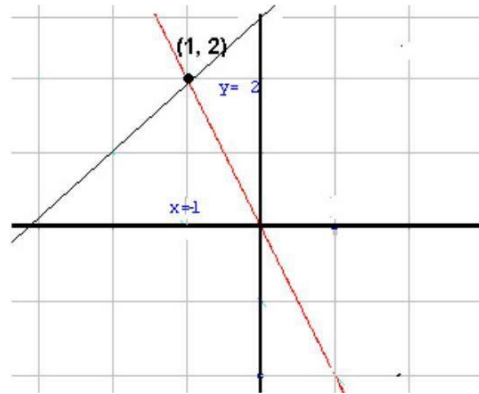
En la Figura 1, se observa que el punto en el cual se intersectan las dos rectas es (3, 5); es decir la solución del sistema es  $x = 3$ ;  $y = 5$ .

Por lo tanto, de la primera llave salen 3 litros de agua en un minuto y de la segunda salen 5 litros de agua en un minuto

Despejamos la  $y$  en las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 & y &= -2x \\ 2x - 2y &= -6 & -2y &= -2x - 6 \\ y &= 3 - x & & \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones del último sistema son las ecuaciones explícitas de dos rectas. Si damos valores a la  $x$  y obtenemos los correspondientes valores de la  $y$  en cada ecuación del sistema, para cada ecuación obtendremos un conjunto de puntos  $(x,y)$ , que representados en un sistema de ejes de coordenadas, dan lugar a una recta. Si consideramos los valores  $x = 0$  y  $x = 1$ , obtenemos para la primera ecuación, los puntos  $(0,0)$  y  $(1,-2)$ , con los cuales tenemos suficiente para representar la recta y para la segunda ecuación, los puntos  $(0,3)$  y  $(1,4)$



Como se puede observar las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas  $(-1, 2)$ . Este punto es de la primera recta y, por tanto, sus coordenadas cumplen la primera ecuación del sistema, pero, al ser también de la segunda recta, también cumple la segunda ecuación del sistema. Por tanto, ¿qué información nos da este punto? Pues que la solución del sistema es  $x = -1$ ,  $y = 2$  lo cual se comprueba si en las ecuaciones del sistema sustituimos  $x$  por  $1$  y,  $y$  por  $-2$



# RESOLUCION DE SISTEMAS POR MÉTODO GRAFICO

## Taller de casa

Bloque de Álgebra y funciones

Destina con cuidado de destrezas

Reconocer a la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

2 Grafica en el plano cartesiano las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a. 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

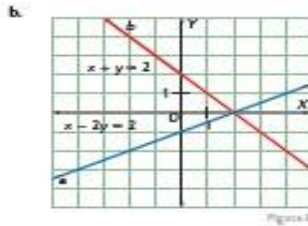
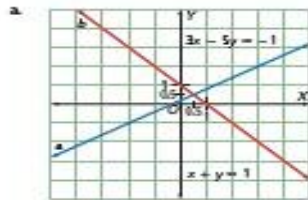
b. 
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 0,2x + 0,5y = 0,1 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x = y = 5 \end{cases}$$

#### Razonamiento

3 Determina la solución del sistema de ecuaciones en cada caso. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.



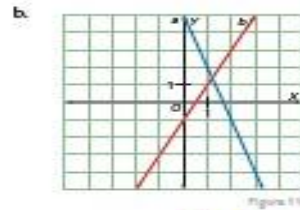
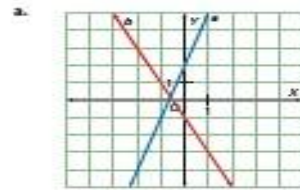
4 Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones con  $6x - 2y = -3$  de tal forma que sea:

- Determinado
- Indeterminado
- Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste. Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

#### Comunicación

5 Determina la ecuación de las rectas del sistema dado. Luego, los valores aproximados para su solución.



#### Resolución de problemas

6 Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

- $x = 2$     $y = 21$
- $x = 4,5$     $y = 2$
- $x = -2$     $y = -0,5$



## 2 Resolución de sistemas por el método gráfico

### MatemáticaS

#### Grafica sistemas de ecuaciones con GeoGebra

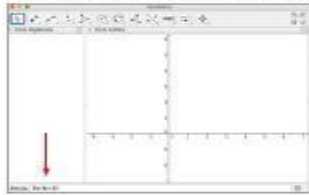
A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

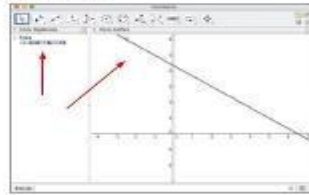


- Primero, en el menú Apariencias, selecciona la opción **Algebra y Gráficos**. Después de hacerlo, verás una pantalla como la que se muestra a la derecha.

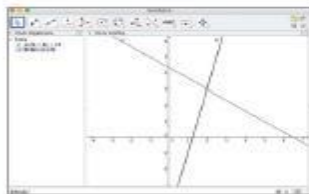
- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada **Entrada**. En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.



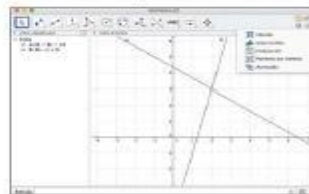
- Al presionar la tecla **Enter**, aparece la gráfica en el plano y la ecuación correspondiente en la ventana al margen izquierdo.



- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.



Para determinar las coordenadas del punto de intersección con una cuadrícula a la ventana de las gráficas. Para ello, selecciona en la parte superior derecha el menú **Preferencias**. Allí elige **Vista gráfica**, luego activa la **Cuadrícula** dando clic en la opción **Mostrar cuadrícula**.



### Trabajando con el Geogebra en el aula





## CONTENIDO A DESARROLLAR, CUARTA, QUINTA Y SEXTA SESION

3

### Resolución de sistemas por el método de sustitución

#### Explora

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.



- ¿Cuántos animales hay de cada especie?

El sistema de ecuaciones que representa la situación del Explora puede resolverse con el método de sustitución. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

$m$ : cantidad de patos       $n$ : cantidad de cerdos

Total de cabezas entre todos los animales:  $m + n = 50$

Total de patas entre todos los animales:  $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$  ← Se despeja  $m$  en la primera ecuación del sistema.

$2(50 - n) + 4n = 134$  ← Se sustituye  $m = 50 - n$  en la segunda ecuación.

$100 - 2n + 4n = 134$  ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.

$100 + 2n = 134$  ← Se despeja  $n$ .

$$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \frac{34}{2} \Rightarrow n = 17$$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión  $m = 50 - n$ , así:  $m = 50 - 17 = 33$ . De esta manera en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

#### Ejemplo 1

Observa cómo se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Se elige la primera ecuación y se despeja  $x$ . Luego se realiza el proceso de sustitución como en la situación inicial:  $x = -3 - 2y$ .

Después, este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$



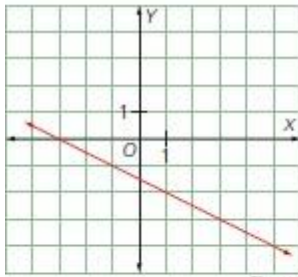


Figura 1

Se elige la primera ecuación y se despeja  $x$ . Luego se realiza el proceso de sustitución como en la situación inicial:  $x = -3 - 2y$ .

Después, este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la Figura 1.

### Actividad resuelta

#### Razonamiento

1 Resuelve este sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

#### Solución:

Se despeja  $y$  en la primera ecuación  $y = 1 - 2x$ . Luego, se sustituye en la segunda:  $3x + 2(1 - 2x) = 4 \Rightarrow 3x + 2 - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 - 2$

$$-x = 2$$

De donde se deduce que  $x = -2$  y al reemplazar  $x$  en la primera ecuación, se obtiene el valor de  $y = 5$ .

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a. 
$$\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} 7a - 9b = 8 \\ 15a + 11b = 32 \end{cases}$$

3 Con el método de sustitución, resuelve cada sistema.

Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase.

Completa esta frase solo con el valor de la solución en la incógnita  $y$ .

a. 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \frac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$$
 Letra N

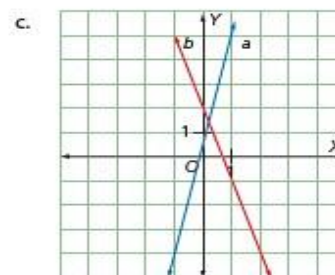
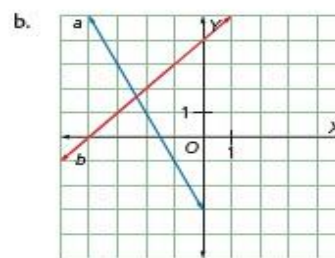
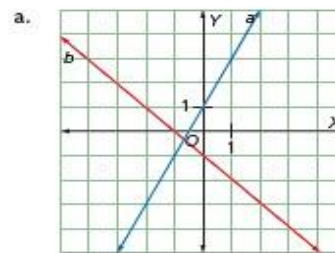
b. 
$$\begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{3y}{4} = 7 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 0 \end{cases}$$
 Letra I

c. 
$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{x}{3} - 1 = \frac{y}{3} \end{cases}$$
 Letra L

d. 
$$\begin{cases} \frac{y}{8} - \frac{5x}{6} = 2 \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$$
 Letra A

#### Razonamiento

4 Identifica las ecuaciones de las rectas para cada sistema y determina, con el método de sustitución, los valores exactos de la solución.







$$e. \begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = -12 \end{cases} \quad \text{Letra S}$$

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

$$\frac{-4}{-4} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{-4}{-4} \quad \frac{12}{12} \quad \frac{-8}{-8} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{-8}{-8} \quad \frac{6}{6}$$

Resolución de problemas

5. Analiza los siguientes sistemas y determina el valor que debe tomar  $a$  o  $b$  para que el sistema cumpla la condición dada.

a.  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - ay = 4 \end{cases}$  Compatible determinado  
Incompatible

b.  $\begin{cases} 4x + by = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$  Compatible determinado  
Compatible indeterminado

8:

QUINTA SESION

4 Resolución de sistemas por el método de reducción

Explora

Martha va al supermercado y compra 4 kg de café y 2 kg de azúcar por \$10. Días después, nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 2 kg de azúcar por \$4.



• ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

Ten en cuenta

El método de reducción sirve cuando se determina que no es sencillo despejar una de las dos incógnitas del sistema de ecuaciones.



El optimismo

Cuando se es optimista se toman buenas decisiones, porque es posible

Como se ha estudiado en temas anteriores, algunas situaciones en las que se observa una relación entre dos datos pueden resolverse al plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

En este caso, las iniciales de cada producto serán las incógnitas al momento de plantear el sistema correspondiente a la situación del Explora.

Sea  $C$ : el precio de un kilogramo de café y  $A$ : el precio de un kilogramo de azúcar.

Según los datos del problema, se tiene que  $4C + 2A = 10$  y  $C + 2A = 4$ . Así puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4C + 2A = 10 \\ C + 2A = 4 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el método de reducción, se intenta eliminar una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema por el método de reducción pueden seguirse los pasos que se describen a continuación:

- 1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será  $C$ .
- 2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder reducirlas. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por  $-4$ . Con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 4C + 2A = 10 \\ -4C - 8A = -16 \end{cases}$$

- 3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{r} 4C + 2A = 10 \\ -4C - 8A = -16 \\ \hline -6A = -6 \end{array}$$

En este caso, la incógnita  $C$  se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita que es  $A$ .

- 4.° Se soluciona la ecuación así:  $-6A = -6$ ; y se obtiene que  $A = 1$ .

- 5.° Se reemplaza el valor  $A = 1$  en una de las ecuaciones:

$$C + 2A = 4 \Rightarrow C + 2 = 4 - 2 \Rightarrow C = 2.$$

Así que un kilogramo de azúcar cuesta \$1 y un kilogramo de café cuesta \$2.



**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución aplicando el método de reducción.

- a.  $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$   
 c.  $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$       d.  $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

**Razonamiento**

3 Relaciona cada sistema de ecuaciones con su correspondiente gráfica. Luego, resuélvelo aplicando el método de reducción:

- a.  $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$   
 c.  $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$       d.  $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

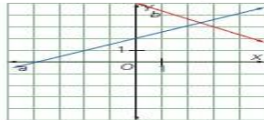


Figura 1

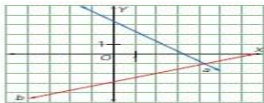


Figura 2

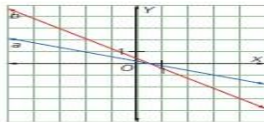


Figura 3

**Modelación**

4 Inventa para cada caso una nueva ecuación con la cual puedas formar un sistema de ecuaciones que cumpla las condiciones dadas:

- a.  $\begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ 5x + 6y = 27 \end{cases}$  Compatible determinado  
 b.  $\begin{cases} 5x + 6y = 27 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$  Compatible indeterminado  
 c.  $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$  Incompatible

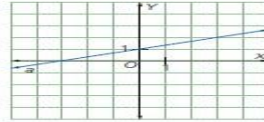


Figura 4

Incompatible

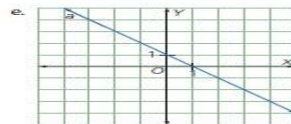


Figura 5

Compatible indeterminado

**Resolución de problemas**

5 Observa el siguiente sistema de ecuaciones y luego responde las preguntas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

- a. ¿Cuál sería la solución de dicho sistema? Escríbela en términos de  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  y  $b_2$ .  
 b. ¿Para qué valores de  $a_2$  y  $b_2$  tiene el sistema infinitas soluciones?



## 5 Resolución de sistemas por el método de igualación

### Explora

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre tres y el segundo entre 6, la diferencia de estas fracciones es 1.



- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

### Ten en cuenta

Despejar la variable  $y$  en las ecuaciones de un sistema, permite que las ecuaciones queden presentadas como ecuaciones canónicas de las rectas.

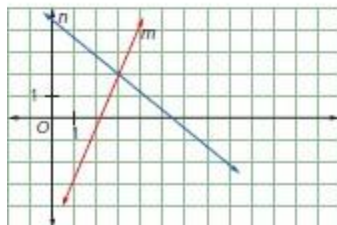


Figura 1

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta en el Explora se consideran las siguientes incógnitas:

$x$ : primer número

$y$ : segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases} \leftarrow \text{Sistema de ecuaciones que describe la situación}$$

El método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicando la transitividad de las igualdades, se igualan y se despeja la otra incógnita.

### Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona de la siguiente manera:

1.° Se despeja  $y$  en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

2.° Se igualan los valores de  $y$ .

$$-x + 51 = 2x - 6$$

3.° Se despeja  $x$ .

$$\begin{aligned} -x - 2x &= -6 - 51 \\ -3x &= -57 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

4.° Se calcula el valor de  $y$ .

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

### Actividad resuelta

#### Ejercitación

1 Resuelve el sistema  $\begin{cases} 7m - 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$

#### Solución:

En este caso se elige  $m$  para despejar en las dos ecuaciones:

$$7m = 15 + 3n \Rightarrow m = \frac{15 + 3n}{7} \text{ y } 5m = 27 - 6n, \text{ luego, } m = \frac{27 - 6n}{5}$$

Ahora se igualan las expresiones y se despeja  $n$ :  $\frac{15 + 3n}{7} = \frac{27 - 6n}{5}$

$$\begin{aligned} 5(15 + 3n) &= 7(27 - 6n) \\ 75 + 15n &= 189 - 42n \\ 15n + 42n &= 189 - 75 \\ 57n &= 114 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Se reemplaza el valor de  $n$  en una de las dos ecuaciones despejadas para así hallar el valor de  $m$ :  $m = \frac{15 + 3n}{7}$ , así para  $n = 2$  se tiene que  $m = \frac{15 + 3(2)}{7}$ ;  $m = 3$ .

La solución para el sistema será  $m = 3$  y  $n = 2$  (Figura 1).



**Destreza con criterios de desempeño:** Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de igualación.

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2 Resuelve los siguientes sistemas con el método de igualación.

a.  $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$       d.  $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e.  $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{7}{12} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$       f.  $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

**Razonamiento**

3 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución del sistema planteado.

a.  $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$$4n = 13 - 7m \quad 5m - 2n = 19$$

$$n = \frac{13 - 7m}{4} \quad n = \frac{19 + 5m}{2}$$

$$\frac{13 - 7m}{4} = \frac{19 + 5m}{2}$$

$$26 - 14m = 76 + 20m$$

$$-14m - 20m = 76 - 26 \quad -34m = 50$$

$$m = -\frac{50}{34} = -\frac{25}{17}$$

Reemplazando para  $n$  se tiene que:

$$n = \frac{13 - 7\left(-\frac{25}{17}\right)}{4} = \frac{99}{17}$$

De este modo  $m = -\frac{25}{17}$  y  $n = \frac{99}{17}$ .

b.  $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$$x = 10 - 2y \quad x = \frac{5 - 4y}{2}$$

$$10 - 2y = \frac{5 - 4y}{2} \quad 20 - 2y = 5 - 4y$$

$$-2y + 4y = 5 - 20 \quad y = -\frac{15}{2}$$

Reemplazando para  $x$  se tiene que:

$$x = \frac{5 - 4\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{35}{2}$$

De este modo  $x = \frac{35}{2}$  y  $y = -\frac{15}{2}$ .

**Razonamiento**

4 Utiliza las siguientes ecuaciones para plantear dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados.

$2x - y = 1$	$x + y = 5$
$x - y = 12$	$x + y = 100$
$-2y + 5x = 10$	$2y - x = -3$
$2x - y = -3$	$2x + 10y = 40$
$3x - 30y = 15$	$3x + 3y = 15$
$-8y + 20x = 40$	$2y - x = 1$

5 Reúnete con cuatro compañeros más y solucionen el siguiente sistema de ecuaciones a partir de los cinco métodos trabajados en la unidad.

$$\begin{cases} 1,5x - 2y = 1 \\ 2,5x - 3y = 6 \end{cases}$$

Cada uno elegirá uno de los métodos. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para este sistema.

**Resolución de problemas**

- 6 Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.
- 7 Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.
- 8 Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?



Juan D. Godino y Vicenç Font

### Ejemplo

Los siguientes sistemas son equivalentes puesto que  $x = 2$  y  $y = 1$  es la solución de los dos sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 5y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ x - 5y = -3 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones inferiores son iguales, mientras que si multiplicamos la ecuación superior  $2x + 3y = 7$  por 2, obtenemos la ecuación  $4x + 6y = 14$ .

Resolver un sistema es hallar su solución. En la secundaria se explican tres métodos de resolución: igualación, sustitución y reducción.

### Ejemplo

Resolución por igualación del sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 5y = -3 \end{cases}$

1) Despejamos  $x$  en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 5y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{7 - 3y}{2} \\ x = -3 + 5y \end{cases}$$

(También se puede despejar la  $y$ )

2) Igualamos las expresiones de la incógnita despejada, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 5y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{7 - 3y}{2} \\ x = -3 + 5y \end{cases} \quad -3 + 5y = \frac{7 - 3y}{2}$$

3) Resolvemos la ecuación anterior; la solución de esta ecuación nos dará el valor de una de las incógnitas:

$$-3 + 5y = \frac{7 - 3y}{2}; \quad -6 + 10y = 7 - 3y; \quad 10y + 3y = 7 + 6; \quad 13y = 13; \quad y = 1$$

(Hemos resuelto una ecuación de primer grado en la que la incógnita es  $y$ )

4) Sustituimos  $y$  por 1 en la ecuación  $x = -3 + 5y$ :

$$x = -3 + 5(1) \quad x = 2$$

Hemos obtenido el valor de la  $x$ . La solución del sistema es  $x = 2$  y  $y = 1$ . Por último, conviene comprobar que el par ordenado de números que hemos obtenido efectivamente son la solución del sistema:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$2 - 5 \cdot 1 = -3$$



17. Resuelve cada sistema por un método diferente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y = 19 \\ 2x - y = 9 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 7 \\ -4x + 4y = -3 \end{array} \right\}$$

Generalmente, un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, tiene una única solución, pero hay excepciones. Por ejemplo,  $\left. \begin{array}{l} -2x + 2y = -2 \\ -2x + 2y = 8 \end{array} \right\}$  es un sistema sin solución, porque si  $-2x + 2y$  vale  $-2$ , es imposible que, a la vez,  $-2x + 2y$  sea  $8$ . Por tanto, no es posible hallar una solución común a las dos ecuaciones.

Si resolvemos este sistema por reducción obtenemos la expresión  $0 = 10$ , y como  $0$  no es igual a  $10$ , el sistema no tiene solución:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 2y = -2 \\ -2x + 2y = 8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -2x + 2y = -2 \\ -2x + 2y = 8 \end{array} \right\} \\ \hline 0 = 10$$

Cuando se llega a una expresión del tipo  $0 = b$  (con  $b$  diferente de cero) el sistema no tiene solución.

Por otra parte, hay sistemas como, por ejemplo,  $\left. \begin{array}{l} -2x + 2y = -2 \\ -4x + 4y = -4 \end{array} \right\}$  que tienen infinitas soluciones. Basta observar que las dos ecuaciones son prácticamente la misma: la segunda es equivalente a la primera ya que resulta de multiplicar la primera por dos. En este caso, las infinitas soluciones de la primera, también lo son de la segunda.

Si resolvemos este sistema por reducción, obtenemos la expresión  $0 = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 2y = -2 \\ -4x + 4y = -4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 8x - 8y = 8 \\ 8x - 8y = 8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 8x - 8y = 8 \\ 8x - 8y = 8 \end{array} \right\} \\ \hline 0 = 0$$

Cuando se llega a una expresión del tipo  $0 = 0$ , el sistema tiene infinitas soluciones.

La resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas explica claramente porque sólo son posibles estas tres posibilidades:

*Ejemplo*

Resolución gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 2x - 2y = -2 \end{array} \right\}$$

Despejamos la  $y$  en las dos ecuaciones

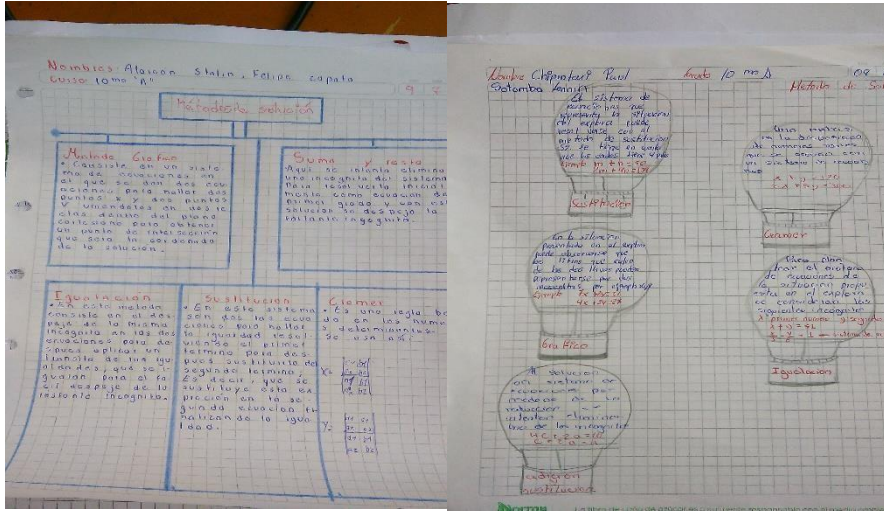
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 2x - 2y = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = -2x \\ -2y = -2x - 6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = -2x \\ y = x + 3 \end{array} \right\}$$

Las dos ecuaciones del último sistema son las ecuaciones explícitas de dos rectas. Si damos valores a la  $x$  y obtenemos los correspondientes valores de la  $y$  en cada ecuación del sistema, para cada ecuación obtendremos un conjunto de puntos  $(x,y)$ , que representados en un sistema de ejes de coordenadas, dan lugar a una recta. Si consideramos los valores  $x = 0$  y  $x = 1$ , obtenemos para la primera ecuación, los puntos

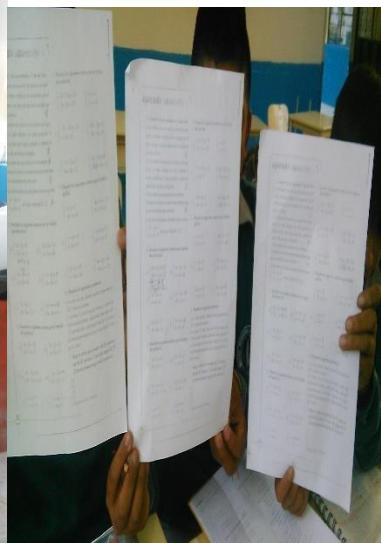
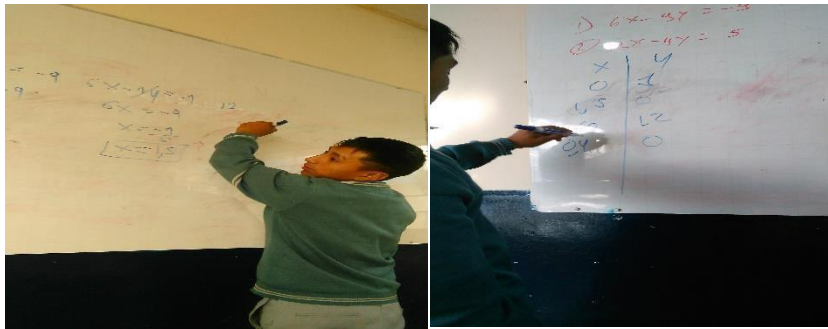
$(0,0)$  y  $(1,-2)$ , con los cuales tenemos suficiente para representar la recta y para la segunda ecuación, los puntos  $(0,3)$  y  $(1,4)$ .



### Trabajando en el aula organizadores gráficos



### Resolviendo ejercicios en el aula



## OCTAVA SESION

OCTAVA sesión: se realizará un debate sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (Gilbert, 2005). Primero, el profesor pedirá que elaboren una tabla con los cuatro métodos resumidos y un ejemplo de cada uno (inteligencia visual-espacial). A continuación, el profesor planteará un sistema de ecuaciones lineales en la pizarra. Los alumnos tendrán que opinar sobre el método más adecuado para su resolución, argumentando y defendiendo su decisión de manera coherente, convincente y clara (inteligencia lingüística). El profesor, dirigirá a los alumnos, respetando los turnos y realizando preguntas para guiar su discurso.

17. Resuelve cada sistema por un método diferente:		
$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 19 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 4y = 7 \\ -4x + 4y = -3 \end{cases}$

Video del debate [https://youtu.be/QqlxrEYd\\_bw](https://youtu.be/QqlxrEYd_bw)

TRABAJO EN CASA





## Estrategia: Combinar operaciones

### Problema

Hace 5 años, la edad de Camila era la tercera parte de la de su abuela y dentro de 13 años la edad de la abuela será el doble de la de Camila. ¿Cuáles son las edades actuales de Camila y de su abuela?

#### 1. Comprende el problema

- ¿Cuáles son los datos que proporciona el problema?  
R: La relación de hace 5 años entre la edad de Camila y la de su abuela, y cómo será esta relación dentro de 13 años.
- ¿Qué debes averiguar?  
R: Las edades actuales de Camila y de su abuela.

#### 2. Crea un plan

- Simboliza la edad de Camila y la de su abuela; encuentra la relación que se establece entre ellas en el tiempo; forma un sistema de dos ecuaciones simultáneas, y resuélvelo.

#### 3. Ejecuta el plan

- Simboliza con  $x$  la edad actual de Camila y con  $y$  la edad actual de su abuela. En una tabla muestra la relación entre dichas edades.

	Edad actual	Hace 5 años	Dentro de 13 años
Camila	$x$	$x - 5$	$x + 13$
Abuela	$y$	$y - 5$	$y + 13$

Tabla 1

- Expresa la relación entre las edades hace 5 años.  
$$x - 5 = \frac{1}{3}(y - 5) \quad (1)$$
- Expresa la relación entre las edades dentro de 13 años.  
$$x + 13 = \frac{1}{2}(y + 13) \quad (2)$$
- Multiplica la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 2 y forma el sistema.  
$$\begin{cases} 3x - 15 = y - 5 \\ 2x + 26 = y + 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x - y = -13 \end{cases}$$

Al resolver este sistema se tiene que  $x = 23$ .

R: La edad actual de Camila es 23 años.

#### 4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la edad actual de la abuela es 59 años.

### Aplica la estrategia

1. La edad de un padre es el triple de la de su hijo y hace 15 años era el doble de la edad actual. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?
  - a. Comprende el problema  
.....  
.....
  - b. Crea un plan  
.....  
.....
  - c. Ejecuta el plan  
.....  
.....
  - d. Comprueba la respuesta  
.....  
.....

### Resuelve otros problemas

2. La suma de dos números es 40 mientras que  $\frac{1}{5}$  de su diferencia es dos. ¿Cuáles son los dos números?
3. Para ingresar a un parque de diversiones, una familia de 3 niños y 2 adultos paga \$100 por las entradas; y otra, conformada por 2 niños y 3 adultos, paga \$105. ¿Cuánto cuesta la entrada de los niños y cuánto la de los adultos?
4. Observa el siguiente sistema de ecuaciones.  
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x + 2 = -2y \end{cases}$$
  
Resuélvelo con el método gráfico y determina cuál es su solución.

### Formula problemas

5. Inventa un problema en el que se incluya la información de la gráfica y resuélvelo.

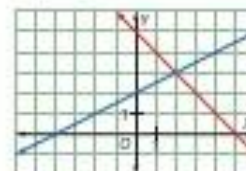


Figura 1

## NOVENA SESION

Concurso en grupo de la resolución de ejercicios



## 10 SESIÓN

### EVALUACION MEDIANTE EL JUEGO

